

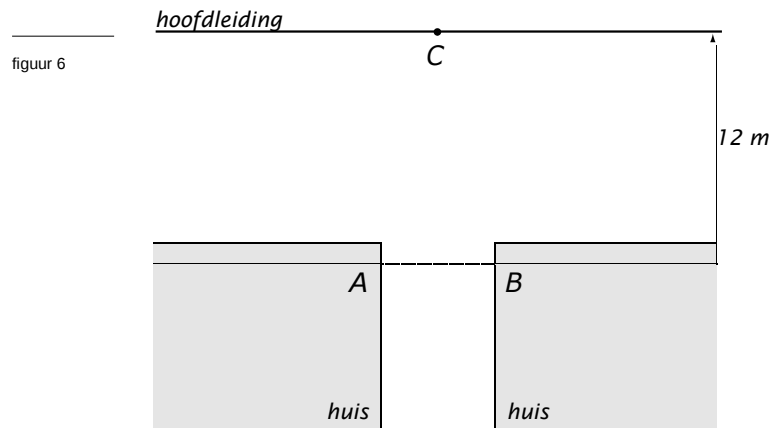
WDA 5B.3 (Vwo)

Probleem Kortste aansluiting (Havo 1999-I)



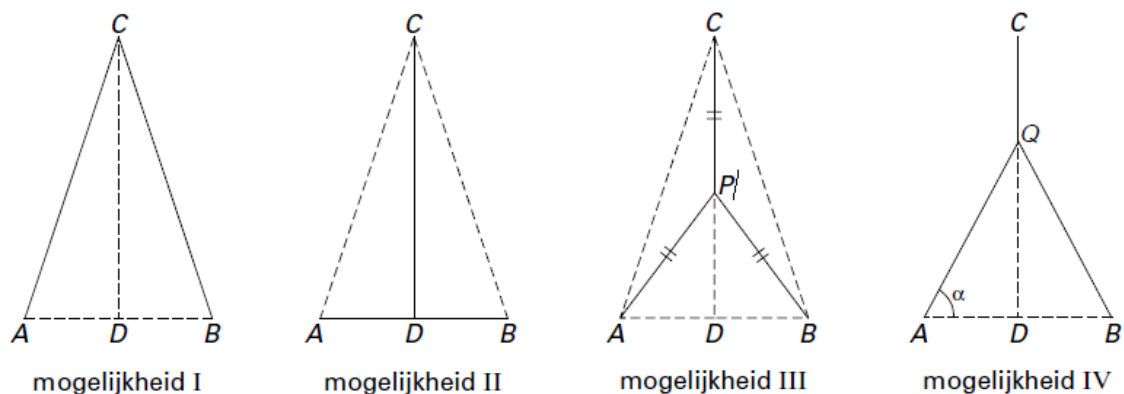
groenewald
vwo havo vmbo

In een nieuwbouwwijk moeten twee huizen worden aangesloten op het waterleidingnet. In figuur 6 is de situatie geschetst.



In het punt C wordt een aftakking gemaakt van de hoofdleiding naar de punten A en B in de huizen. De punten A , B en C liggen zo dat driehoek ABC gelijkbenig is met $AC = BC$ en $AB = 8$ meter. De hoofdleiding loopt evenwijdig aan AB op een afstand van 12 meter van de lijn door A en B .

De verbinding tussen C en de beide huizen kan op verschillende manieren worden gelegd. In de figuur hieronder zijn vier mogelijkheden aangegeven.



Eerst bekijken we mogelijkheden I en II:

I Vanaf C twee rechtstreekse leidingen CA en CB .

II Vanaf C een leiding naar het midden D van AB , die vervolgens vertakt naar A en B .

4p 1 **Onderzoek bij welke van de mogelijkheden I en II de totale lengte van de verbinding het kortst is.**

Vervolgens bekijken we mogelijkheid III:

III Vanaf C een leiding naar een punt P op de symmetrieas CD van driehoek ABC en vervolgens vanuit P vertakkingen naar A en B , zo dat $CP = PA = PB$.

5p 2 Bereken exact de totale lengte van de verbinding bij mogelijkheid III.

Tenslotte bekijken we nog mogelijkheid IV:

IV Vanaf C een leiding naar een punt Q op CD en vanuit Q vertakkingen naar A en B .
De totale lengte van de verbindingsleidingen tussen C en de huizen hangt af van hoek α tussen AQ en AB .

De totale lengte $L(\alpha)$ van de verbinding wordt dan voor elke toegestane waarde van α gegeven door de formule:

$$L(\alpha) = \frac{a}{\cos(\alpha)} + b \cdot \tan(\alpha) + c \quad (\text{met } \alpha \text{ in radialen en } L(\alpha) \text{ in meters})$$

5p 3 Bereken algebraïsch en exact de waarden van a , b en c . (2 tips)

Er is een punt Q op CD zo dat de totale lengte $L(\alpha)$ minimaal is.

4p 4 Bereken exact de bijbehorende waarde van α .
(als je het antwoord op vraag 3 niet hebt koop dan een tip zodat je met de goede waarden kunt rekenen)

Hulpje

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x) \rightarrow f'(x) = \cos(x) \\ f(x) &= \cos(x) \rightarrow f'(x) = -\sin(x) \\ f(x) &= \tan(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \end{aligned}$$

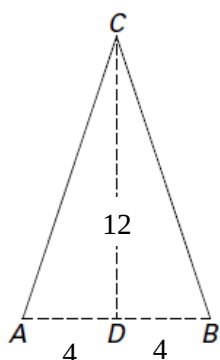
REGELS EN TIPS WDA 5B-3 (Vwo)

REGELS

1. Je kunt in totaal 18 punten halen
2. Een tip kost je één punt
3. Per vraag kun je 1 of 2 tips kopen.
4. In de laatste 15 minuten kun je geen tips kopen.
5. Maak de opdrachten algebraïsch

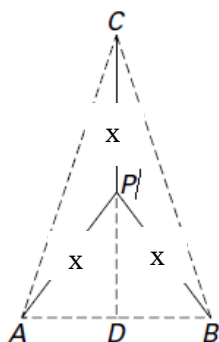
TIPS

TIP vraag 1



[-1]

TIP vraag 2



Stel $CP = x$

$CP = AP = BP = x$ en $PD = 12 - x$

[-1]

TIP vraag 3.1

$$\cos(\alpha) = \frac{4}{AQ} \rightarrow AQ = \frac{4}{\cos(\alpha)} \quad [-1]$$

TIP vraag 3.2

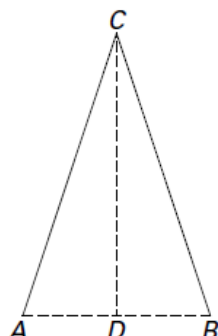
$$\tan(\alpha) = \frac{QD}{4} \rightarrow QD = 4 \tan(\alpha) \quad [-1]$$

TIP vraag 4

$$L'(\alpha) = -8(\cos(\alpha))^{-2} \cdot -\sin(\alpha) - \frac{4}{\cos^2(\alpha)} \quad [-1]$$

ANTWOORDEN WDA 5B-3 (Vwo)

Vraag 1 (4 punten)

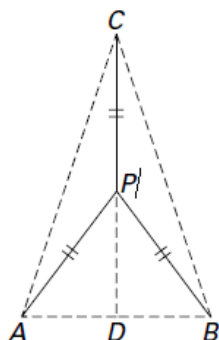


I: $AC = \sqrt{4^2 + 12^2} = \sqrt{160} = 12,65 \text{ m}$ /
 Totale lengte: $2 \cdot 12,65 = 25,30 \text{ m}$ /

II: $CD = 12, AB = 8$
 Totale lengte: $12 + 8 = 20 \text{ m}$ /

Conclusie: II is korter. /

Vraag 2 (5 punten)



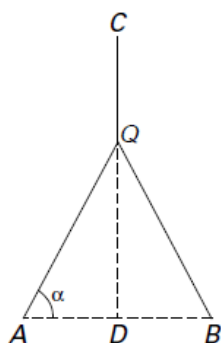
Stel $CP = x$, dan $PD = 12 - x$ /

$$x = AP = \sqrt{4^2 + (12 - x)^2} = \sqrt{4^2 + 144 - 24x + x^2} = \sqrt{x^2 - 24x + 160}$$
 /

$$\rightarrow x^2 = x^2 - 24x + 160 \rightarrow 24x = 160 \rightarrow x = 6,67 \text{ m} /$$

Totale afstand: $3x = 20,0 \text{ m}$ /

Vraag 3 (5 punten)



$$\cos \alpha = \frac{4}{AQ} \rightarrow AQ = QB = \frac{4}{\cos \alpha} /$$

$$CQ = 12 - QD \quad \text{met} \quad \tan \alpha = \frac{QD}{4} \rightarrow QD = 4 \tan \alpha /$$

$$\text{Totale lengte: } L = 2AQ + CQ = \frac{8}{\cos \alpha} + 12 - 4 \tan \alpha \text{ (m)} /$$

Vraag 4 (4 punten)

$$\text{Dan moet } \frac{dL}{d\alpha} = 0 \rightarrow \frac{8 \sin \alpha}{(\cos \alpha)^2} - \frac{4}{(\cos \alpha)^2} = 0 \rightarrow 8 \sin \alpha = 4$$

$$\rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} /$$