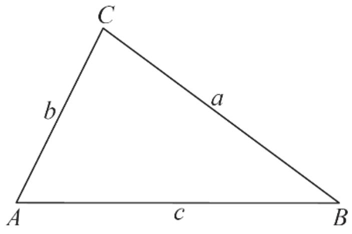
WDA VWO5B-1 (17-1-2017)

Probleem 1 De formule van Heron (a4 b5 c6 punten)

In de eerste eeuw van onze jaartelling schreef de Egyptenaar Heron een werk waarin hij een formule gaf voor de oppervlakte van een driehoek.
Hij deed dit als volgt. Noem de lengtes van de zijden van de driehoek *a*, *b* en *c* . Zie figuur.



Noem de halve omtrek van de driehoek *s.* Dus $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

Een formule voor de oppervlakte *H* van de driehoek is dan:

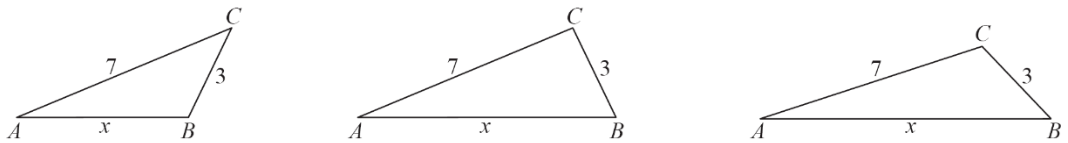
$$H = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Deze formule wordt *de formule van Heron* genoemd.

a. Toon aan dat deze formule de juiste uitkomst geeft voor de oppervlakte van een rechthoekige driehoek met zijden 3, 4 en 5. (geen tip)

In het vervolg van deze opgave gebruiken we dat de formule van Heron voor elke driehoek geldt.

We bekijken driehoeken *ABC* met *AC* =7 en *BC* =3 . De lengte van de derde zijde *AB* noemen we *x* , met $4 < x < 10$. In de onderstaande figuur zijn drie van dergelijke driehoeken getekend.



Voor de oppervlakte *H* van zo'n driehoek *ABC* geldt: $H(x) = \sqrt{(25 - \frac{1}{4}x^2)(\frac{1}{4}x^2 - 4)}$

b. Toon dit aan met behulp van de formule van Heron.

Er is één waarde van *x* waarvoor de oppervlakte van driehoek *ABC* maximaal is.

c. Bereken exact deze waarde van *x* .

Z.O.Z.

Probleem 2 Logaritmes (a2 b2 c3 punten)

Gegeven is $\log(3) = a$ en $\log(4) = b$.

Druk de volgende logaritmes uit in a en/of b

a. $\log(12)$

b. $\log(2)$

c. $\log(72)$

Opmerking: Koop bij dit probleem een tip als je de logregels niet meer weet!

REGELS EN TIPS WDA VWO5B-1 (17-1-2017)

REGELS

1. Je kunt in totaal 22 punten halen
2. Een tip kost je één punt
3. Per vraag kun je 1 tip kopen.
4. In de laatste 15 minuten kun je geen tips kopen.
5. Maak de opdrachten algebraïsch.

TIPS

TIP Probleem 1a

Geen tip

TIP Probleem 1b

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c) \;=\; \frac{1}{2}(3+7+x) = 5 + \frac{1}{2}x \qquad \rightarrow \qquad H = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

[-1]

TIP Probleem 1c

$$H = \sqrt{\left(25 - \frac{1}{4}x^2\right)\left(\frac{1}{4}x^2 - 4\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{25}{4}x^2 - 100 - \frac{1}{16}x^4 + x^2\right)} = \sqrt{\left(-\frac{1}{16}x^4 + \frac{29}{4}x^2 - 100\right)} \qquad \rightarrow \qquad H`(x) = 0$$

[-1]

TIP Probleem 2

Logregels:

${}^{g}\log(a) + {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log(ab)$

${}^{g}\log(a) - {}^{g}\log(b) = {}^{g}\log(a/b)$

${}^{g}\log(a^{n}) = k \cdot {}^{n}\log(a)$

[-1]

ANTWOORDEN WDA VWO5B-1 (17-1-2017)

Probleem 1 (a4 b5 c6 punten)

a.

$s = \frac{1}{2}(3+4+5) = 6$ [1]

$H = \sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)} = \sqrt{6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \sqrt{36} = 6$ [2]

$opp = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$

Dus klopt, zowel de formule van Heron en de oppervlakte driehoek geven 6. [1]

b.

$s = \frac{1}{2}(3+7+x) = 5 + \frac{1}{2}x$ [1]

$H = \sqrt{\left(5+\frac{1}{2}x\right)\left(5+\frac{1}{2}x-3\right)\left(5+\frac{1}{2}x-7\right)\left(5+\frac{1}{2}x-x\right)}$ [2]

$= \sqrt{\left(5+\frac{1}{2}x\right)\left(2+\frac{1}{2}x\right)\left(\frac{1}{2}x-2\right)\left(5-\frac{1}{2}x\right)}$ [1]

$= \sqrt{\left(5+\frac{1}{2}x\right)\left(5-\frac{1}{2}x\right)\left(\frac{1}{2}x+2\right)\left(\frac{1}{2}x-2\right)} = \sqrt{(25-\frac{1}{4}x^2)(\frac{1}{4}x^2-4)}$ [1]

c.

$H = \sqrt{\left(25-\frac{1}{4}x^2\right)\left(\frac{1}{4}x^2-4\right)}$

$= \sqrt{\left(\frac{25}{4}x^2 - 100 - \frac{1}{16}x^4 + x^2\right)} = \sqrt{(-\frac{1}{16}x^4 + \frac{29}{4}x^2 - 100)}$ [1]

$u = -\frac{1}{16}x^4 + \frac{29}{4}x^2 - 100 \quad \rightarrow \quad u` = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{58}{4}x$

$H(u) = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}} \quad \rightarrow \quad H`(u) = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2u^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$

$H`(x) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot \left(-\frac{1}{4}x^3 + \frac{58}{4}x\right) = \frac{-\frac{1}{4}x^3+\frac{58}{4}x}{2\sqrt{-\frac{1}{16}x^4+\frac{29}{4}x^2-100}}$ [2]

$H`(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{-\frac{1}{4}x^3+\frac{58}{4}x}{2\sqrt{-\frac{1}{16}x^4+\frac{29}{4}x^2-100}} = 0$ [1]

$-\frac{1}{4}x^3 + \frac{58}{4}x = 0$ [1]

$x\left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{58}{4}\right) = 0$

$\cancel{x = 0} \quad V \quad -\frac{1}{4}x^2 + \frac{58}{4} = 0$

$-\frac{1}{4}x^2 = -\frac{58}{4}$

$x^2 = 58$

$x = \sqrt{58} \quad V \quad \cancel{x = -\sqrt{58}}$

Dus als $x = \sqrt{58}$ [1]

Probleem 2 (a2 b2 c3 punten)

log(3) = a en log(4) = b

a.

log(12) = log(3 · 4) [1]

= log(3) + log(4) = a + b [1]

b.

$\log(2) = \log(4^{\frac{1}{2}})$ [1]

$= \frac{1}{2} \cdot \log(4) = \frac{1}{2}\text{b}$ [1]

c.

log(72) = log(9 · 8) = log(9) + log(8) [1]

$= \log(3^2) + \log(4^{1,5})$ [1]

= 2 · log(3) + 1,5 · log(4) = 2a + 1,5b [1]