

Examen VWO

**2016**

tijdvak 2  
donderdag 23 juni  
13:30 - 16:30 uur

**wiskunde B (pilot)**

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 16 vragen.

Voor dit examen zijn maximaal 81 punten te behalen.

Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

# Formules

---

## Goniometrie

$$\sin(t + u) = \sin(t)\cos(u) + \cos(t)\sin(u)$$

$$\sin(t - u) = \sin(t)\cos(u) - \cos(t)\sin(u)$$

$$\cos(t + u) = \cos(t)\cos(u) - \sin(t)\sin(u)$$

$$\cos(t - u) = \cos(t)\cos(u) + \sin(t)\sin(u)$$

$$\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$$

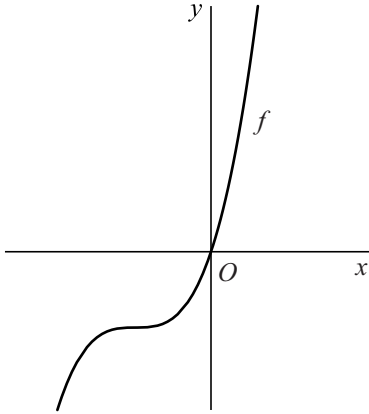
$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2\cos^2(t) - 1 = 1 - 2\sin^2(t)$$

## De derde macht

---

De functie  $f$  wordt gegeven door  $f(x) = (x+1)^3 - 1$ . In de figuur is de grafiek van  $f$  weergegeven.

**figuur**



De functie  $g$  wordt gegeven door  $g(x) = \sqrt[3]{x+1} - 1$ .

De functie  $g$  is de inverse functie van  $f$ .

3p 1 Bewijs dat  $g$  inderdaad de inverse functie is van  $f$ .

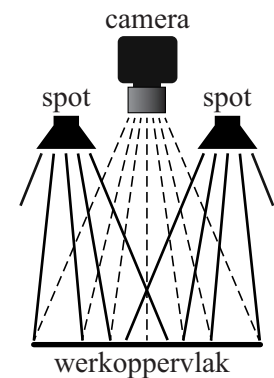
De grafieken van  $f$  en  $g$  hebben gemeenschappelijke punten.

6p 2 Bereken exact de coördinaten van deze punten.

# Spots

Veel industriële en medische processen worden gestuurd door een digitale camera die gekoppeld is aan een computer. Hierbij is een gelijkmatige verlichting van het werkkoppervlak van groot belang. Voor de belichting gebruikt men vaak een of meer kleine spots. Zie figuur 1.

figuur 1



Om de belichting goed te kunnen instellen is de hoogte van de spots boven het werkkoppervlak variabel.

We bekijken eerst de situatie met één spot  $S$ . Zie figuur 2.

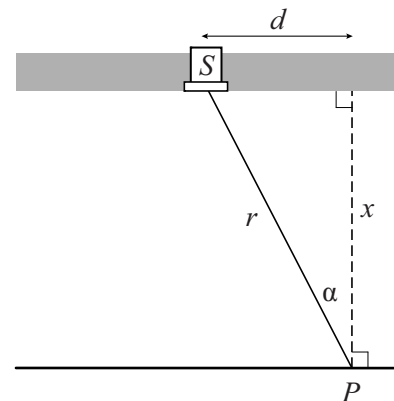
De waargenomen verlichtingssterkte  $E$  (in lux) in een punt  $P$  van een horizontaal oppervlak kan berekend worden met de formule:

$$E = \frac{I_{\text{spot}}}{4\pi r^2} \cdot \cos \alpha$$

Hierin is:

- $I_{\text{spot}}$  een constante: de door de spot uitgezonden lichtstroom (in microlumen)
- $r$  de afstand (in mm) tot de spot
- $\alpha$  de hoek (in radialen) tussen de lichtstraal en de loodlijn in  $P$  op het werkkoppervlak

figuur 2



In figuur 2 is  $d$  de horizontale afstand in mm van de spot tot  $P$  en  $x$  de verticale afstand in mm van de spot tot  $P$ . Er geldt:

$$E = \frac{I_{\text{spot}}}{4\pi} \cdot \frac{x}{(x^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

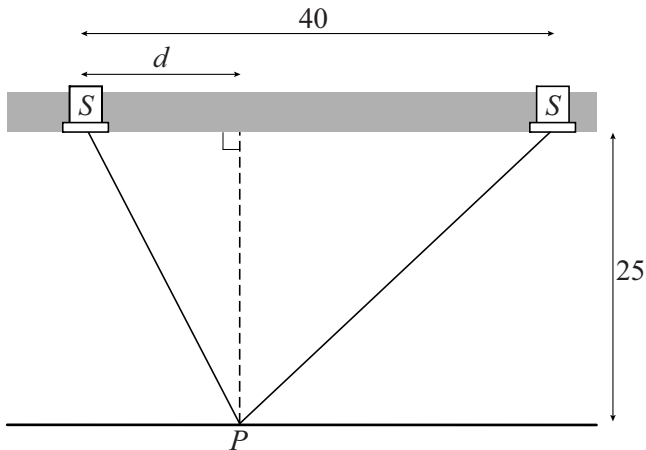
4p 3 Bewijs dit.

We kiezen  $d = 10$ . Er is een waarde van  $x$  waarvoor  $E$  maximaal is.

7p 4 Bereken algebraïsch deze waarde van  $x$ . Rond je antwoord af op één decimaal.

In de rest van deze opgave bekijken we de situatie met twee identieke spots. Voor elke spot geldt:  $I_{\text{spot}} = 500$ . De spots hebben horizontaal een onderlinge afstand van 40 mm en schijnen recht naar beneden. De verticale afstand van de spots tot het werkkoppervlak is 25 mm. Zie figuur 3. Hierin is ook  $d$  aangegeven, de horizontale afstand in mm van de linker spot tot  $P$ .

**figuur 3**



De totale verlichtingssterkte  $E_{\text{totaal}}$  in een punt op het werkkoppervlak is de som van de waargenomen verlichtingssterktes in dat punt van beide spots.

Het deel van het werkkoppervlak tussen de spots wordt voldoende gelijkmatig belicht als de laagste waarde van  $E_{\text{totaal}}$  in dat deel minstens 80% van de hoogste waarde van  $E_{\text{totaal}}$  bedraagt.

- 6p **5** Onderzoek of bij de ingestelde verticale afstand van 25 mm het deel van het werkkoppervlak tussen de spots voldoende gelijkmatig belicht wordt.

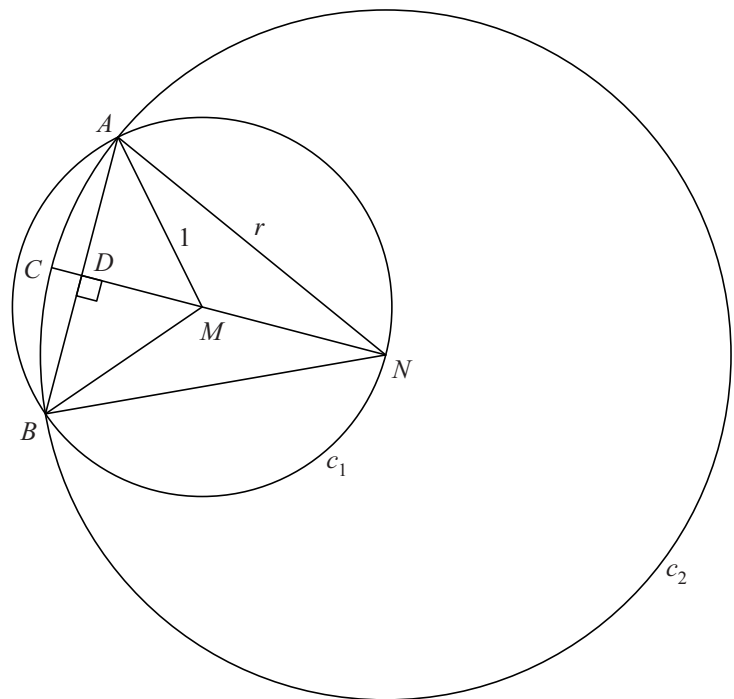
## Twee snijdende cirkels

Gegeven is cirkel  $c_1$  met straal 1 en middelpunt  $M$ . Op de cirkel ligt punt  $N$ . Punt  $N$  is het middelpunt van cirkel  $c_2$  met straal  $r$  waarbij  $1 < r < 2$ . De twee cirkels snijden elkaar in de punten  $A$  en  $B$ . Zie figuur 1, die ook op de uitwerkbijlage staat.

Lijn  $MN$  snijdt cirkel  $c_2$  in punt  $C$  en lijnstuk  $AB$  in punt  $D$ . Lijnstuk  $AB$  staat loodrecht op lijn  $MN$ .

Er geldt  $DN = \frac{1}{2}r^2$ .

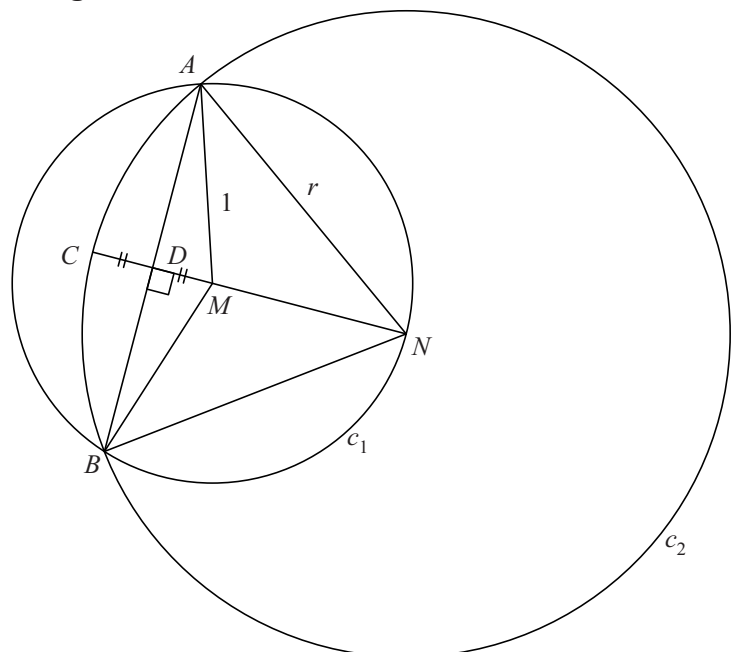
figuur 1



- 4p 6 Bewijs dat inderdaad geldt  $DN = \frac{1}{2}r^2$ . Je kunt hierbij gebruikmaken van de figuur op de uitwerkbijlage.

Je kunt de waarde van  $r$  zo kiezen dat  $CD$  en  $DM$  even lang zijn. Dan ontstaat de situatie in figuur 2, die ook op de uitwerkbijlage staat.

figuur 2



- 4p 7 Bereken exact deze waarde van  $r$ . Je kunt hierbij gebruikmaken van de figuur op de uitwerkbijlage.

## Sinusoïde met perforaties

---

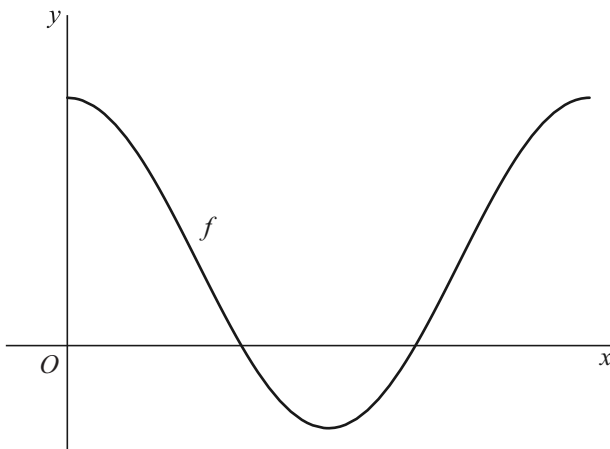
De functie  $f$  wordt gegeven door:

$$f(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{\cos(x)} + 1$$

We bekijken in deze opgave alleen het deel van de grafiek van  $f$  waarvoor  $x \geq 0$  en  $x \leq 2\pi$ .

De grafiek van  $f$  is een sinusoïde met perforaties. In de figuur is de grafiek van  $f$  weergegeven. De perforaties van de grafiek zijn in de figuur niet aangegeven.

**figuur**



5p 8 Bereken exact de coördinaten van de perforaties van de grafiek van  $f$ .

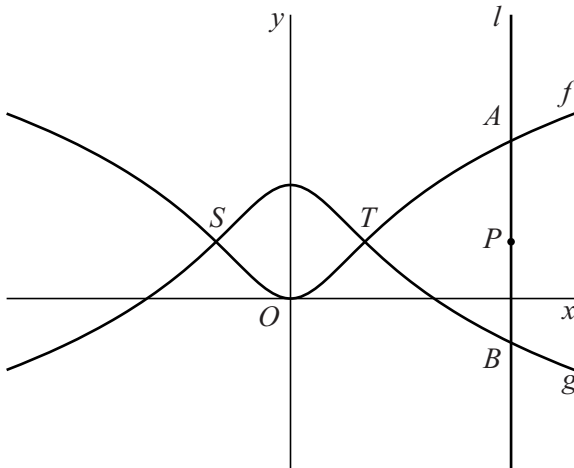
## Getransformeerde grafiek

De functies  $f$  en  $g$  worden gegeven door:

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) \text{ en } g(x) = \ln\left(\frac{e^2}{x^2 + 1}\right)$$

De grafieken van  $f$  en  $g$  staan in figuur 1. Ze snijden elkaar in de punten  $S$  en  $T$ .

**figuur 1**



Lijn  $l$  met vergelijking  $x = p$  snijdt de grafiek van  $f$  in punt  $A$  en de grafiek van  $g$  in punt  $B$ . Het punt op lijn  $l$  met  $y$ -coördinaat 1 noemen we  $P$ . In figuur 1 is de situatie weergegeven waarbij  $l$  rechts van  $T$  ligt.

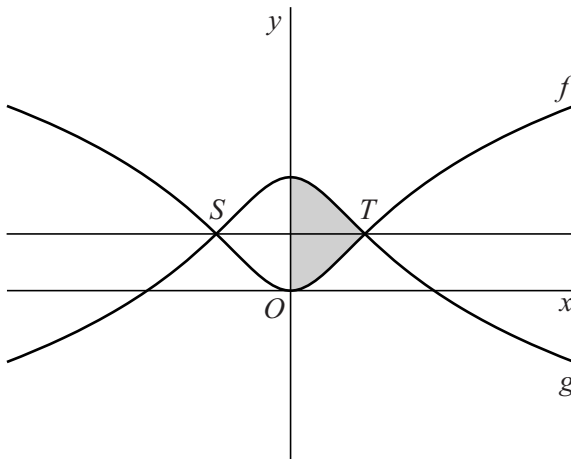
3p **9** Bewijs dat in deze situatie  $AP = BP$ .



Ook voor waarden van  $p$  waarvoor  $l$  niet rechts van  $T$  ligt, geldt dat  $AP = BP$ . Hieruit volgt dat de grafieken van  $f$  en  $g$  elkaars gespiegelde zijn in de lijn met vergelijking  $y = 1$ . Deze lijn is getekend in figuur 2.

In figuur 2 is het gebied rechts van de  $y$ -as dat wordt ingesloten door de grafieken van  $f$  en  $g$  en de  $y$ -as, grijsgemaakt.

**figuur 2**

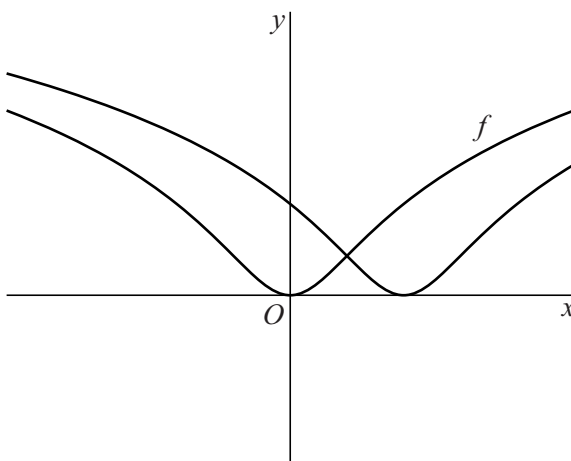


Dit gebied wordt gewenteld om de  $y$ -as.

5p 10 Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam.

De grafiek van  $f$  wordt 2 naar rechts verschoven. In figuur 3 staan de grafiek van  $f$  en de verschoven grafiek.

**figuur 3**



8p 11 Bewijs dat de twee grafieken elkaar loodrecht snijden.

## Droogligtijd

In de Waddenzee varieert de waterhoogte in de loop van de tijd. Eb en vloed wisselen elkaar voortdurend af in een getijdencyclus met een periode van ongeveer 745 minuten. De waterhoogte in het oostelijke deel van de Waddenzee kan worden benaderd met de formule:

$$h = 125 \cos\left(\frac{2\pi}{745} t\right)$$

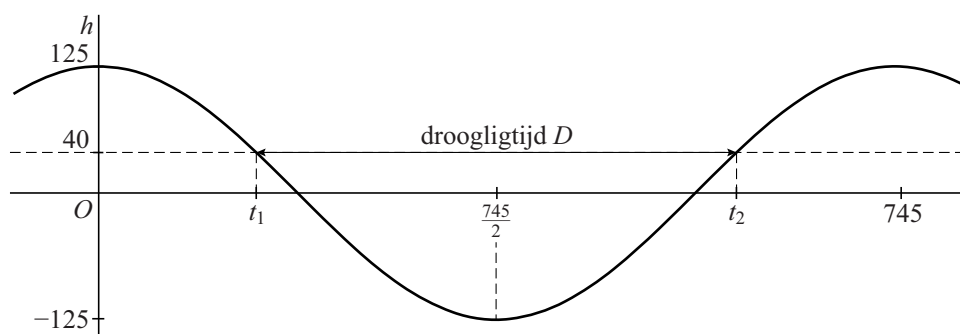
Hierbij is  $h$  de waterhoogte in cm ten opzichte van NAP (Normaal Amsterdams Peil) en is  $t$  de tijd in minuten. Tijdstip  $t = 0$  komt overeen met een moment waarop  $h = 125$ .

In het oostelijk deel van de Waddenzee liggen verschillende zandbanken die gedurende een deel van een getijdencyclus droog komen te liggen. De **droogligtijd**  $D$  is het aantal minuten per getijdencyclus dat een zandbank niet geheel onder water ligt. De droogligtijd hangt af van de hoogte van de zandbank: de hoogte van het hoogste punt van de zandbank ten opzichte van NAP.

In het oostelijk deel van de Waddenzee bevindt zich een zandbank met een hoogte van 40 cm boven NAP.

In figuur 1 is de grafiek van de waterhoogte  $h$  getekend. Tevens is de hoogte van deze zandbank weergegeven. Gedurende één periode zijn er twee tijdstippen waarop de waterhoogte  $h$  gelijk is aan de hoogte van de zandbank. We noemen deze tijdstippen  $t_1$  en  $t_2$ . Het verschil tussen  $t_2$  en  $t_1$  is de droogligtijd  $D$ .

figuur 1



- 4p 12 Bereken de droogligtijd  $D$  van deze zandbank. Rond je antwoord af op een geheel aantal minuten.

Op drooggevallen zandbanken kunnen waddenvogels voedsel vinden. Daarom willen natuuronderzoekers het verband weten tussen de hoogte van de zandbanken en de tijd dat ze droog liggen.

Met  $z$  duiden we de hoogte in cm van de zandbank aan, ten opzichte van NAP. Er geldt dan:

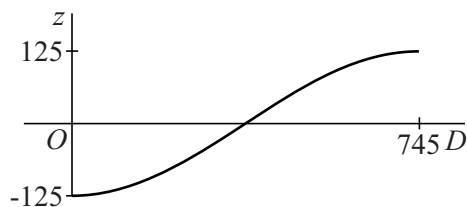
$$z = 125 \cos\left(\pi - \frac{\pi}{745} D\right)$$

5p 13 Bewijs dit.

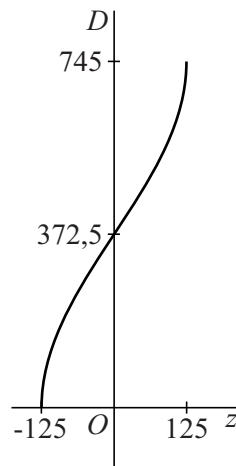
In figuur 2 is de grafiek van  $z$  getekend voor waarden van  $D$  tussen 0 en 745.

Ook kan een grafiek van het verband tussen  $D$  en  $z$  worden getekend waarbij  $z$  op de horizontale as en  $D$  op de verticale as wordt gekozen. Zie figuur 3.

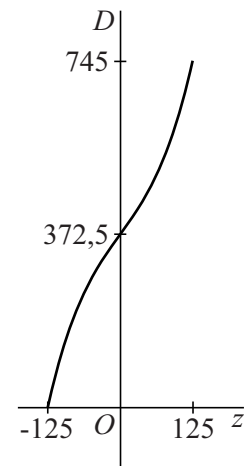
figuur 2



figuur 3



figuur 4



In onderzoeksrapporten wordt, in plaats van de formule die bij figuur 3 hoort, ook wel de volgende derdegraads formule gebruikt:

$$D = 8 \cdot 10^{-5} z^3 + 1,7z + 372,5$$

De bijbehorende grafiek staat in figuur 4.

De grafieken in figuren 3 en 4 lijken op elkaar. Zo verschillen de hellingen van beide grafieken in het punt  $(0; 372,5)$  niet veel.

De helling in een punt op de grafiek van figuur 3 kan worden berekend met behulp van de helling in het overeenkomstige punt in figuur 2: er geldt dat het product van deze twee hellingen gelijk is aan 1.

5p 14 Bereken op algebraïsche wijze bij elk van de figuren 3 en 4 de helling van de grafiek in het punt  $(0; 372,5)$ . Rond je antwoorden af op één decimaal.

**Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.**

## Punt bewegend over een lijn

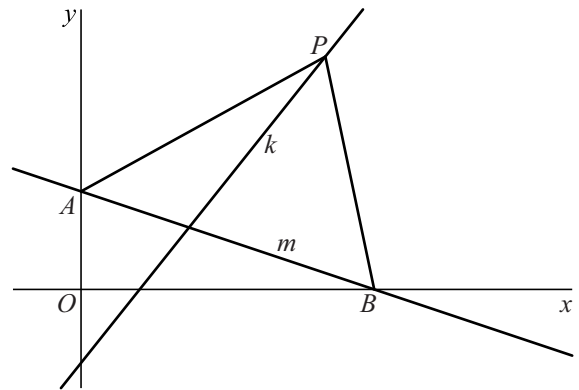
Lijn  $k$  is de lijn met vectorvoorstelling

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Punt  $P$  beweegt over lijn  $k$ .

Lijn  $m$  gaat door de punten  $A(0, 2)$  en  $B(6, 0)$ . Zie figuur 1.

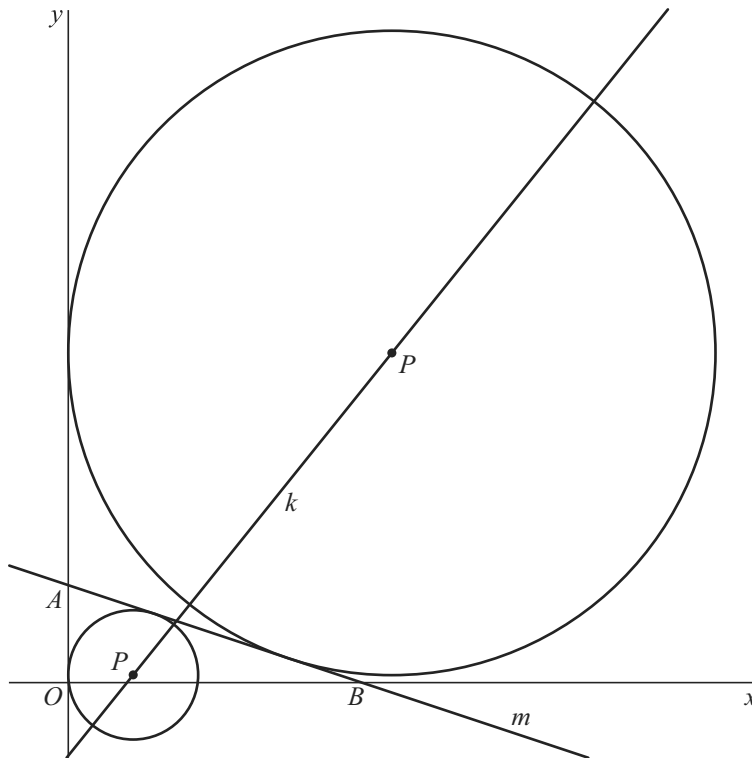
figuur 1



- 5p **15** Bereken exact de coördinaten van  $P$  in de situatie dat  $AP = BP$ .

Er zijn twee posities van  $P$  waarvoor een cirkel met middelpunt  $P$  bestaat die zowel raakt aan de  $y$ -as als aan lijn  $m$ . In figuur 2 zijn deze twee cirkels getekend.

figuur 2



- 7p **16** Bereken van beide cirkels de straal. Rond je antwoord af op twee decimalen.