Examen VWO

2012

tijdvak 2
woensdag 20 juni
13.30 - 16.30 uur

wiskunde B (pilot)

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 16 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 79 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Formules

Goniometrie

$$\sin(t+u) = \sin t \cos u + \cos t \sin u$$
$$\sin(t-u) = \sin t \cos u - \cos t \sin u$$
$$\cos(t+u) = \cos t \cos u - \sin t \sin u$$
$$\cos(t-u) = \cos t \cos u + \sin t \sin u$$

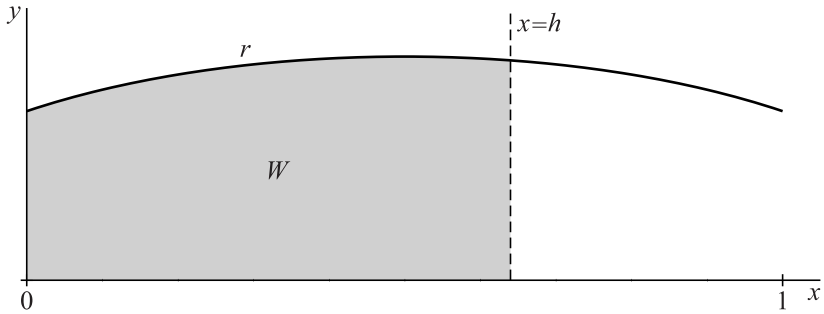
$$\sin(2t) = 2\sin t \cos t$$
$$\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$$

Een regenton

Op het domein [0, 1] is de functie r gegeven door $r(x) = \frac{1}{10}\sqrt{5 + 15x - 15x^2}$.

W is het vlakdeel dat wordt ingesloten door de x-as, de y-as, de grafiek van r en de lijn $x = h$, met $0 < h \leq 1$. Zie de onderstaande figuur.

figuur



Voor het volume V van het omwentelingslichaam dat ontstaat door vlakdeel W om de x-as te wentelen, geldt:

$$V = \frac{\pi}{40}\left(2h + 3h^2 - 2h^3\right)$$

5p **1** Toon aan dat deze formule voor V juist is.

Als de grafiek van r om de x-as gewenteld wordt, ontstaat een figuur die lijkt op een regenton. Voor x, h en r nemen we de meter als eenheid, zodat de ton 1 meter hoog is.
V is dus het volume van het water in de ton als het water h meter hoog staat.

5p **2** Bereken de waterhoogte in de ton als deze voor drie vierde deel is gevuld. Rond je antwoord af op een geheel aantal cm.

foto

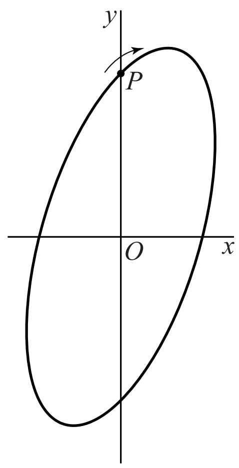
Een ellipsvormige baan

Punt P doorloopt in het Oxy-vlak een ellipsvormige baan volgens de bewegingsvergelijkingen

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}\sin t \\ y(t) = \sin(t + \frac{1}{3}\pi) \end{cases}$$

Hierin is t de tijd.
De baan van P is weergegeven in figuur 1.

figuur 1



Gedurende de beweging verandert de afstand van P tot de oorsprong.

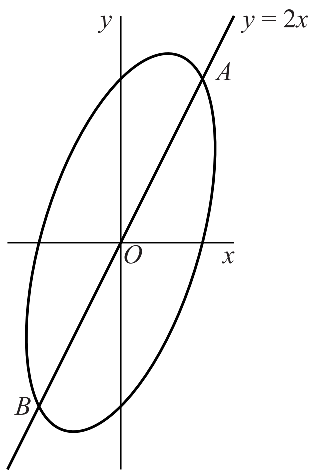
3p **3** Bereken de maximale afstand van P tot de oorsprong. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

5p **4** Bereken exact de snelheid van P als $t = 0$.

De baan van P snijdt de lijn met vergelijking $y = 2x$ in de punten A en B. Zie figuur 2.

6p **5** Bereken exact de coördinaten van A en B.

figuur 2



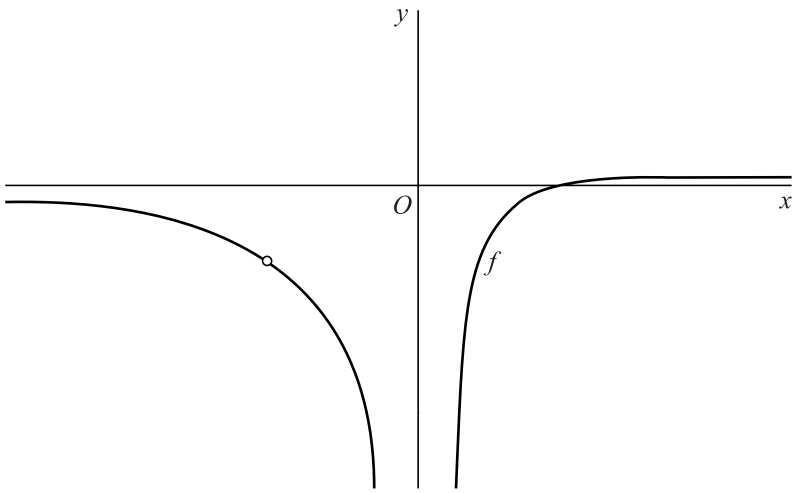
Raaklijn door perforatie

De functie f wordt gegeven door:

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x^3+2x^2} \quad \text{met } x\neq -2 \text{ en } x\neq 0$$

De grafiek van f heeft een perforatie. In de figuur is de grafiek van f met de perforatie getekend.

figuur



De raaklijn aan de grafiek in het snijpunt van de grafiek met de x-as gaat door de perforatie.

7p **6** Toon dit aan met behulp van differentiëren.

Medicijn in actieve vorm

Sommige medicijnen kennen een passieve en een actieve vorm. Ze worden in passieve vorm ingespoten en door het lichaam omgezet in actieve vorm.

De hoeveelheid medicijn in passieve vorm, in milligram, die t uur na inspuiten nog niet is omgezet in actieve vorm, noemen we $p(t)$. Als 25 mg wordt ingespoten, geldt de volgende formule:

$$p(t) = 25 \cdot e^{-k \cdot t}$$

Hierbij is k een positieve constante waarvan de waarde afhangt van het type medicijn. Hoe groter k, hoe sneller het medicijn in passieve vorm wordt omgezet in actieve vorm.

Om de werkzaamheid van het medicijn te onderzoeken, meet men hoe lang het duurt tot 99% van de hoeveelheid medicijn in passieve vorm is omgezet naar medicijn in actieve vorm. Deze tijdsduur t_{99} hangt af van k.

3p **7** Druk t_{99} uit in k.

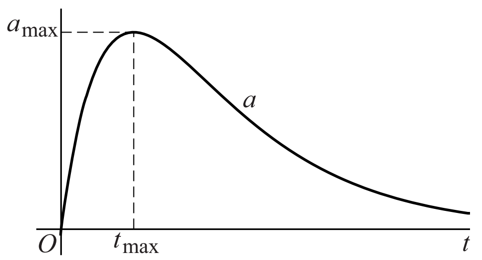
Het medicijn in actieve vorm wordt door de lever afgebroken. De omzetting van medicijn in passieve vorm naar medicijn in actieve vorm en de afbraak van medicijn in actieve vorm vinden gelijktijdig plaats.

Een patiënt krijgt een injectie met een dergelijk medicijn. De hoeveelheid medicijn in actieve vorm, in milligram, die t uur na inspuiten in het lichaam zit, noemen we $a(t)$. Voor $a(t)$ geldt:

$$a(t) = 25\left(e^{-0,1 \cdot t} - e^{-0,4 \cdot t}\right)$$

In figuur 1 is de grafiek van a getekend.

figuur 1

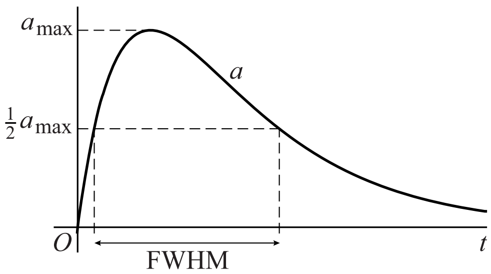


Het maximum van a noemen we a_{max}. Dit maximum wordt aangenomen op tijdstip t_{max}.

4p **8** Bereken t_{max} met behulp van differentiëren.

Als maat voor de tijdsduur die een medicijn werkzaam is, wordt gekeken naar de zogenoemde FWHM (*Full Width at Half Maximum*). Dat is de breedte van de piek in de grafiek van a ter hoogte van $\frac{1}{2}a_{max}$. Anders gezegd: de FWHM geeft aan hoe lang de hoeveelheid medicijn in actieve vorm in het lichaam minstens 50% is van de maximale hoeveelheid a_{max}.
In figuur 2 is de FWHM aangegeven.

figuur 2

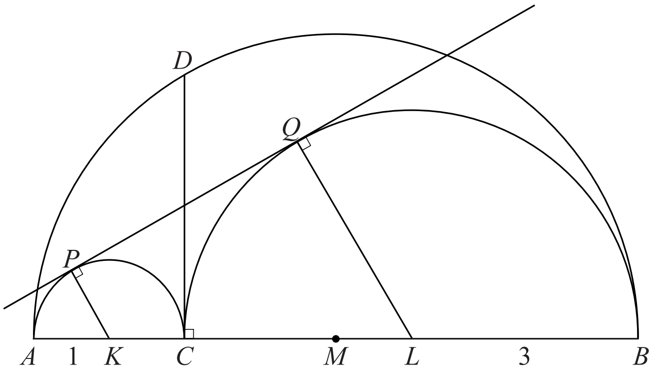


6p **9** Bereken de FWHM in uren nauwkeurig.

Drie halve cirkels

Gegeven is een halve cirkel met middellijn AB en straal 4. Het middelpunt van deze cirkel is M.
Op lijnstuk AB ligt het punt C zo dat $AC = 2$.
AC en CB zijn de middellijnen van twee andere halve cirkels met stralen 1 en 3.
De middelpunten van deze twee halve cirkels zijn respectievelijk K en L.
Alle halve cirkels liggen aan dezelfde kant van AB.
De lijn door C loodrecht op AB snijdt de grootste halve cirkel in punt D.
Lijn PQ is de gemeenschappelijke raaklijn aan de twee binnenste halve cirkels, waarbij P en Q de raakpunten zijn. PQ staat dus loodrecht op KP en op LQ.
Zie figuur 1.

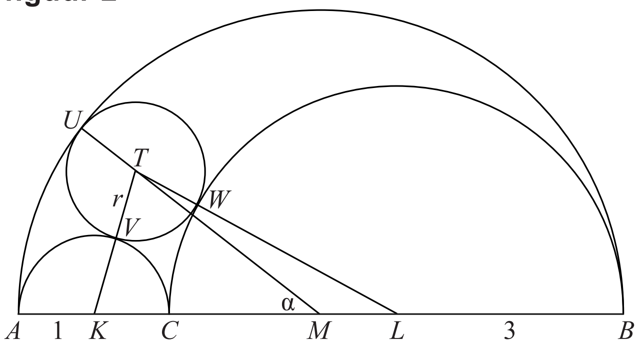
figuur 1



5p **10** Toon aan dat CD en PQ exact even lang zijn. Je kunt hierbij gebruik maken van de figuren op de uitwerkbijlage.

Tussen de drie halve cirkels past precies één cirkel die raakt aan elk van de drie gegeven halve cirkels. Deze cirkel heeft middelpunt T en straal r. De raakpunten van deze cirkel met de drie halve cirkels zijn U, V en W. Zie figuur 2. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 2



$\angle TMK$ noemen we α.

Gebruik van de cosinusregel in driehoek MKT geeft $\cos\alpha = \dfrac{12-5r}{12-3r}$.

5p **11** Toon aan dat inderdaad geldt: $\cos\alpha = \dfrac{12-5r}{12-3r}$.

Gebruik van de cosinusregel in driehoek MLT geeft bovendien $\cos\alpha = \dfrac{7r-4}{4-r}$.

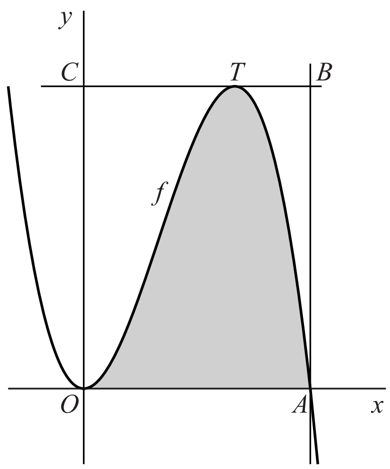
Met behulp van de twee hierboven gegeven uitdrukkingen voor $\cos\alpha$ kan de waarde van r berekend worden.

4p **12** Bereken exact de waarde van r.

Onafhankelijk van p

Voor elke positieve waarde van p is een functie f gegeven door
$f(x) = -x^3 + 3px^2$.
De grafiek van f heeft twee punten met de x-as gemeenschappelijk: $O(0, 0)$ en punt A. Zie onderstaande figuur.
De top van de grafiek van f die rechts van de y-as ligt, noemen we T.
De horizontale lijn door T snijdt de y-as in punt C en snijdt de verticale lijn door A in punt B. De oppervlakte van het gebied onder de grafiek van f binnen rechthoek $OABC$ is in de figuur grijs gemaakt.

figuur



8p **13** Toon aan dat de verhouding van de oppervlakte van het grijze gebied en de oppervlakte van rechthoek $OABC$ onafhankelijk is van p.

Twee lijnen en een cirkel

Gegeven zijn de lijn m met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$,

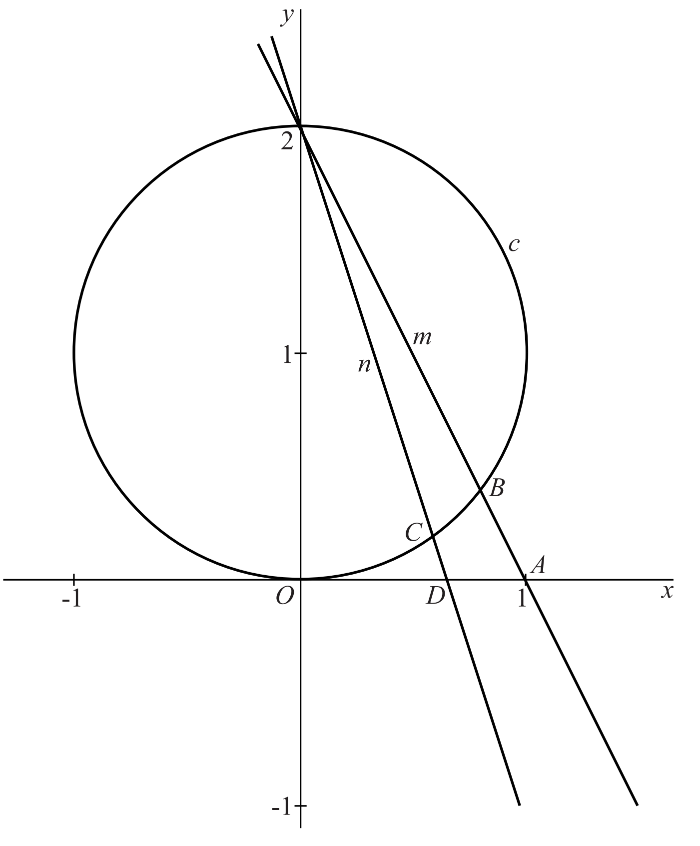
de lijn n met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

en de cirkel c met vergelijking $x^2 + (y-1)^2 = 1$.

3p **14** Bereken de hoek tussen m en n. Rond je antwoord af op een geheel aantal graden.

Lijn m snijdt de x-as in A en lijn m snijdt cirkel c in $(0, 2)$ en in B.
Lijn n snijdt de x-as in D en lijn n snijdt cirkel c in $(0, 2)$ en in C.
Zie de figuur.

figuur



Voor het punt B geldt: $B(\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$.

4p **15** Toon aan dat het punt B inderdaad de coördinaten $(\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$ heeft.

Voor de punten A, C en D geldt: $A(1, 0)$, $C(\frac{3}{5}, \frac{1}{5})$ en $D(\frac{2}{3}, 0)$.

6p **16** Toon aan dat de punten A, B, C en D op één cirkel liggen.