Examen VWO

2018

tijdvak 2
woensdag 20 juni
13.30 - 16.30 uur

wiskunde B

Dit examen bestaat uit 16 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 77 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Formules

Goniometrie

$$\sin(t+u)=\sin(t)\cos(u)+\cos(t)\sin(u)$$
$$\sin(t-u)=\sin(t)\cos(u)-\cos(t)\sin(u)$$
$$\cos(t+u)=\cos(t)\cos(u)-\sin(t)\sin(u)$$
$$\cos(t-u)=\cos(t)\cos(u)+\sin(t)\sin(u)$$

$$\sin(2t)=2\sin(t)\cos(t)$$
$$\cos(2t)=\cos^2(t)-\sin^2(t)=2\cos^2(t)-1=1-2\sin^2(t)$$

Loodrecht in de perforatie

De functie f is gegeven door $f(x) = \dfrac{-2 + 2\sqrt{x+1}}{x}$.

Ook is gegeven de functie h door $h(x) = \dfrac{2}{1 + \sqrt{x+1}}$.

Voor $x \neq 0$ geldt: $f(x) = h(x)$

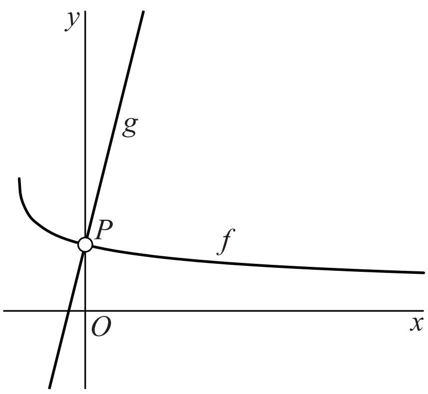
3p **1** Bewijs dat voor $x \neq 0$ geldt: $f(x) = h(x)$

Verder is de functie g gegeven door $g(x) = \dfrac{4x^2 + x}{x}$.

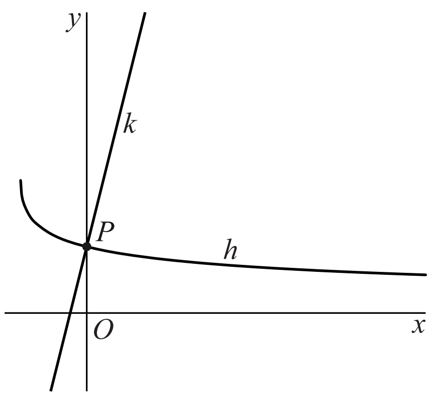
Er is een lijn k die voor $x \neq 0$ samenvalt met de grafiek van g.

In figuur 1 zijn de grafieken van f en g weergegeven.
Punt $P(0,1)$ is de perforatie van beide grafieken.
In figuur 2 zijn de grafiek van h en lijn k weergegeven en ook hun snijpunt P.

figuur 1



figuur 2



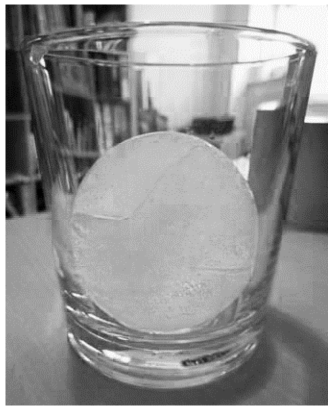
Er geldt:
de grafieken van f en g staan in hun perforatie P loodrecht op elkaar als de grafiek van h en lijn k in hun snijpunt P loodrecht op elkaar staan.

5p **2** Bewijs dat de grafieken van f en g in hun perforatie P loodrecht op elkaar staan.

IJsbol

De snelheid waarmee een ijsklontje smelt, hangt onder andere af van de verhouding tussen de oppervlakte A in cm^2 en het volume V in cm^3 van het ijsklontje. Deze verhouding wordt uitgedrukt in het quotiënt $\frac{A}{V}$.
Voorbeeld: bij een kubusvormig ijsklontje met ribben van 3 cm is dit quotiënt gelijk aan $\frac{54}{27} = 2$.

foto



Er zijn ook bolvormige ijsklontjes ofwel **ijsbollen**. Zie de foto.

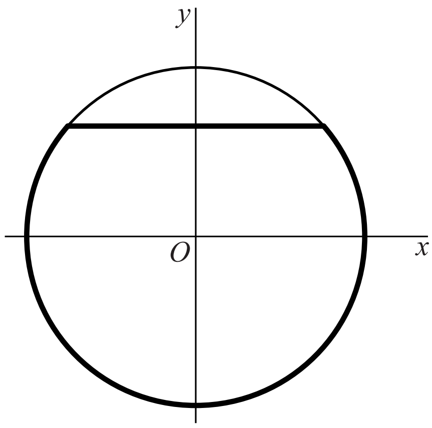
Voor een bol met straal r gelden voor A en V de formules $A = 4\pi r^2$ en $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Bij een ijsbol met hetzelfde volume als het genoemde kubusvormige ijsklontje met ribben van 3 cm is het quotiënt $\frac{A}{V}$ kleiner dan 2.

4p **3** Bereken algebraïsch dit quotiënt bij deze ijsbol. Rond je eindantwoord af op 2 decimalen.

Een ijsbol wordt in een glas water gedaan, waarna de ijsbol in het water drijft. Op het moment dat de ijsbol in het water wordt gedaan, heeft deze een straal van 1,5 cm. Er geldt dat 92% van het volume van de ijsbol onder water zit en 8% erboven.
Het volume van de ijsbol is dan $\frac{4}{3}\pi \cdot 1{,}5^3 \approx 14{,}137$ cm^3.
Het deel van de ijsbol onder het wateroppervlak is op te vatten als een omwentelingslichaam dat ontstaat bij wenteling van een deel van de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 2{,}25$ om de y-as.
Zie de figuur.

figuur



5p **4** Bereken hoeveel cm de ijsbol boven het water uitsteekt op het moment dat hij in het water wordt gedaan. Rond je eindantwoord af op 2 decimalen.

In een wiskundig model van het smelten van een ijsbol wordt ervan uitgegaan dat de ijsbol tijdens het smelten bolvormig blijft.
De straal van de ijsbol is afhankelijk van de tijd. De straal van de ijsbol op tijdstip t is $r(t)$, met t in minuten.

Het volume van de ijsbol op tijdstip t is dan $V(t) = \frac{4}{3}\pi\left(r(t)\right)^3$. In het model wordt er verder van uitgegaan dat de formule van $r(t)$ lineair is.

Een ijsbol heeft op tijdstip $t = 0$ een straal van 1,5 cm. Op tijdstip $t = 10$ is het volume van deze ijsbol gehalveerd. Vanaf een bepaald tijdstip is er geen ijs meer aanwezig.

5p **5** Bereken vanaf welk geheel aantal minuten er voor het eerst geen ijs meer aanwezig is.

Constante verhouding

Voor $a > 0$ wordt de functie f_a gegeven door $f_a(x) = x - x\ln(ax)$.

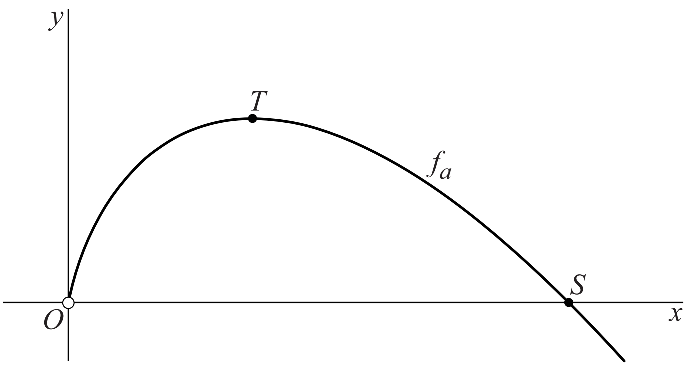
4p **6** Bewijs dat voor elke toegestane waarde van x geldt:

$$\frac{f_a(x) + f_{\frac{1}{a}}(x)}{2} = f_1(x)$$

Voor elke positieve waarde van a geldt:
– de grafiek van f_a snijdt de x-as in precies één punt S (met x-coördinaat x_S);
– de grafiek van f_a heeft één top T (met x-coördinaat x_T).

In de figuur zijn voor een waarde van a de grafiek van f_a en de punten S en T weergegeven.

figuur

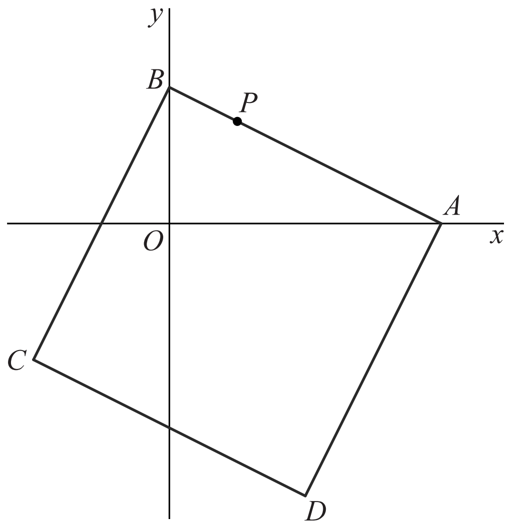


7p **7** Bewijs dat voor elke positieve waarde van a de verhouding $\frac{x_S}{x_T}$ constant is.

Gekanteld vierkant

Gegeven is het vierkant $ABCD$ met hoekpunten $A(8, 0)$, $B(0, 4)$, $C(-4, -4)$ en $D(4, -8)$.
Op zijde AB ligt het punt $P(2, 3)$.
Zie figuur 1.

figuur 1



De punten B, C en P liggen op één cirkel.

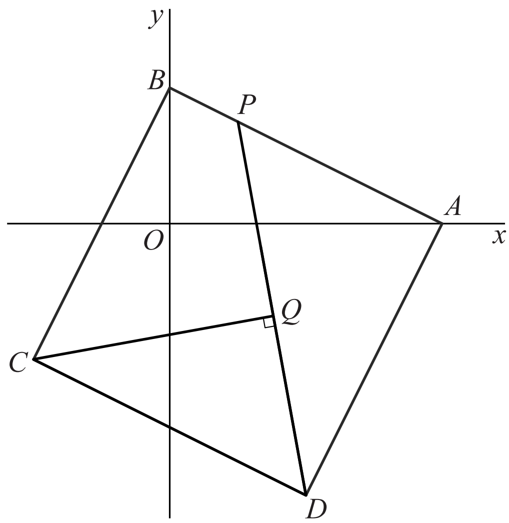
5p **8** Stel een vergelijking op van deze cirkel.

Over lijnstuk DP beweegt (van D naar P) een punt Q.

Er is een positie van Q waarvoor lijnstuk CQ loodrecht staat op lijnstuk DP. Zie figuur 2.

5p **9** Bereken voor deze positie exact de coördinaten van Q.

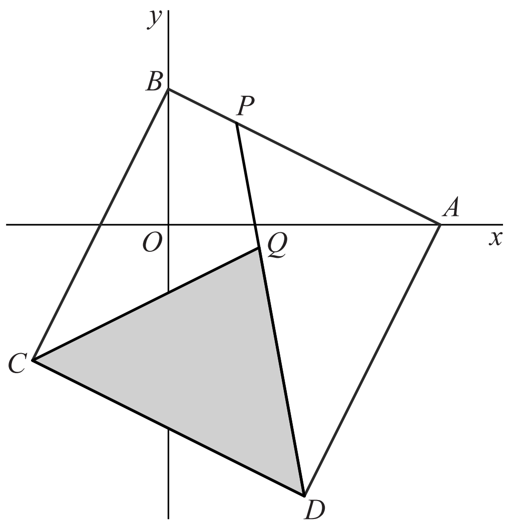
figuur 2



In figuur 3 is driehoek CDQ grijs gemaakt.
Er is een positie van Q waarbij de oppervlakte van driehoek CDQ een derde deel is van de oppervlakte van vierkant $ABCD$.

5p **10** Bereken voor deze positie exact de coördinaten van Q.

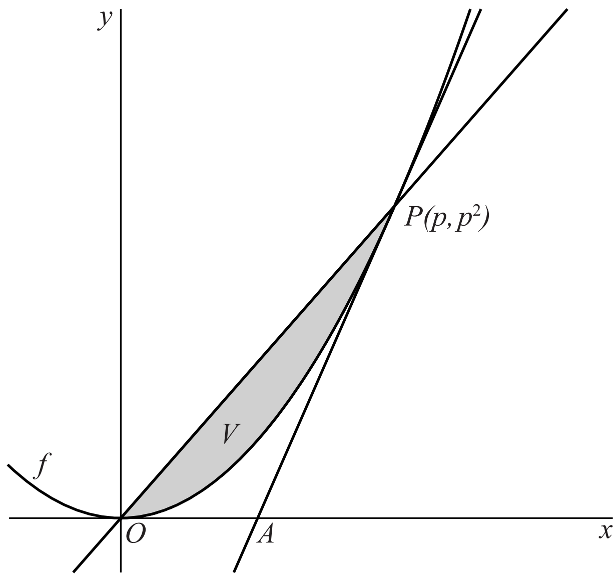
figuur 3



Anderhalf keer zo groot

De functie f is gegeven door $f(x) = x^2$.
De raaklijn aan de grafiek van f in een punt $P(p, p^2)$ met $p > 0$ snijdt de x-as in een punt A.
V is het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de lijn OP.
Zie de figuur.

figuur



8p **11** Bewijs dat de oppervlakte van driehoek OAP anderhalf keer zo groot is als de oppervlakte van V.

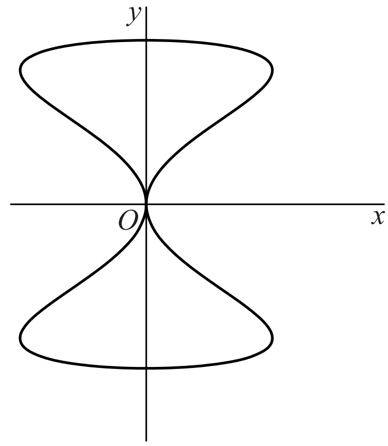
Een baan

Een punt beweegt voor $0 \leq t \leq 2\pi$ volgens de bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t)\sin(2t) \\ y(t) = \cos(t) \end{cases}$$

De baan van het bewegende punt is weergegeven in figuur 1.

figuur 1



Voor $t = \frac{1}{2}\pi$ en $t = 1\frac{1}{2}\pi$ bevindt het bewegende punt zich in O. Deze situatie laten we in de gehele opgave verder buiten beschouwing.

P_t is de positie van het bewegende punt op tijdstip t.

Er geldt: de lijn door P_a en $P_{\pi-a}$ is voor elke in deze situatie mogelijke waarde van a verticaal.

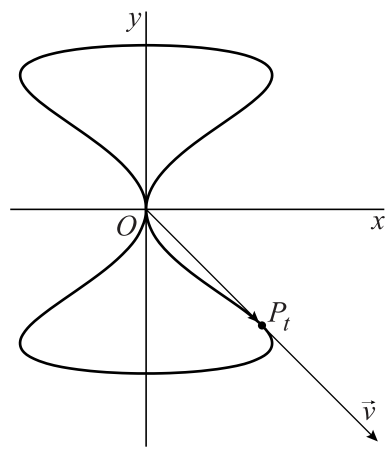
3p **12** Bewijs dat die lijn inderdaad verticaal is.

Er zijn meerdere tijdstippen waarvoor geldt dat de afstand van P_t tot de x-as twee keer zo groot is als de afstand van P_t tot de y-as.

5p **13** Bereken exact het vierde tijdstip waarvoor dit het geval is.

Voor iedere waarde van t kunnen de snelheidsvector $\vec{v}$ vanuit punt P_t en de vector $\overrightarrow{OP_t}$ worden getekend.
In figuur 2 zijn punt P_t, vector $\overrightarrow{OP_t}$ en vector $\vec{v}$ getekend voor $t = \frac{3}{4}\pi$.

figuur 2



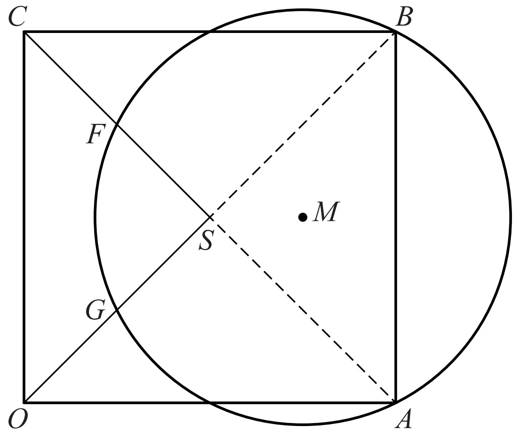
5p **14** Bewijs dat voor $t = \frac{3}{4}\pi$ geldt: $\overrightarrow{OP_t} = \vec{v}$

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

Buiten een vierkant

Gegeven is het vierkant $OABC$ met $O(0,0)$, $A(4,0)$ en $C(0,4)$.
Het snijpunt van OB en AC is het punt S.
Het punt $M(3,2)$ is het middelpunt van een cirkel door A en B.
De punten F en G zijn de snijpunten van deze cirkel met CS respectievelijk OS. Zie figuur 1.

figuur 1



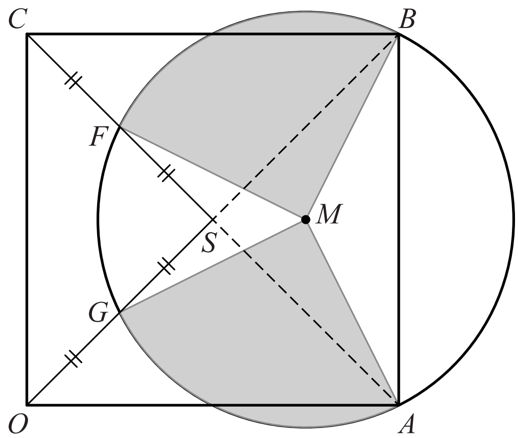
Er geldt: F is het midden van CS.

5p **15** Bewijs dat F inderdaad het midden is van CS.

Verder geldt: G is het midden van OS.

In figuur 2 zijn de cirkelsectoren BMF en GMA grijs gemaakt.

figuur 2



De oppervlakte van deze twee sectoren samen is gelijk aan de helft van de oppervlakte van de cirkel.

3p **16** Bewijs dit.