**Examen VWO**

# 2016

tijdvak 2
woensdag 22 juni
13:30 - 16:30 uur

## wiskunde A (pilot)

Dit examen bestaat uit 21 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 82 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

## OVERZICHT FORMULES

### Differentiëren

| **naam van de regel** | **functie** | **afgeleide** |
|---|---|---|
| somregel | $s(x) = f(x) + g(x)$ | $s'(x) = f'(x) + g'(x)$ |
| productregel | $p(x) = f(x) \cdot g(x)$ | $p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ |
| quotiëntregel | $q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ | $q'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$ |
| kettingregel | $k(x) = f(g(x))$ | $k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ of $\dfrac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g} \cdot \dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$ |

### Logaritmen

| **regel** | **voorwaarde** |
|---|---|
| ${}^{g}\log a + {}^{g}\log b = {}^{g}\log ab$ | $g>0,\ g \neq 1,\ a>0,\ b>0$ |
| ${}^{g}\log a - {}^{g}\log b = {}^{g}\log \dfrac{a}{b}$ | $g>0,\ g \neq 1,\ a>0,\ b>0$ |
| ${}^{g}\log a^{p} = p \cdot {}^{g}\log a$ | $g>0,\ g \neq 1,\ a>0$ |
| ${}^{g}\log a = \dfrac{{}^{p}\log a}{{}^{p}\log g}$ | $g>0,\ g \neq 1,\ a>0,\ p>0,\ p \neq 1$ |

## SMOG-index

Er is veel onderzoek gedaan naar de moeilijkheidsgraad van teksten. Er zijn dan ook verschillende manieren om die in een getal uit te drukken. Deze opgave gaat over één van die manieren.

Begin 2014 publiceerde NRC Handelsblad het volgende fragment uit een artikel over de gebruiksvoorwaarden van Googlesoftware.

**fragment**

> Google's gebruiksvoorwaarden worden met argusogen gevolgd door privacywaakhonden als Bits of Freedom en het College Bescherming Persoonsgegevens. Ze hebben het vaak over de inhoud van zulke teksten, maar hoe zit het met de moeilijkheidsgraad van de teksten? Die is hoog bij Google's privacyvoorwaarden, volgens SMOG, de methode waarmee de moeilijkheidsgraad van een tekst berekend wordt aan de hand van woordlengte en zinlengte (hoe langer, hoe moeilijker).

De SMOG-index van een tekst geeft het aantal jaar opleiding aan dat nodig is om de tekst te kunnen begrijpen. Je berekent de SMOG-index ($S$) met de formule:

$$S = 1{,}0430 \cdot \sqrt{M \cdot \frac{30}{Z}} + 3{,}1291$$

Hierin is $M$ het aantal woorden van drie of meer lettergrepen en $Z$ het aantal zinnen. Voor bovenstaand fragment geldt dat $M = 14$.

3p **1** Bereken de SMOG-index van de tekst in het fragment. Rond je antwoord af op een geheel getal.

Als de SMOG-index van een tekst te hoog is, kun je de tekst herschrijven. Als je bij het herschrijven van een tekst 15% minder woorden met drie of meer lettergrepen gebruikt, wordt $S$ kleiner. Maar die verkleining van $S$ had je ook kunnen bereiken door de tekst alleen te herschrijven in meer zinnen.

4p **2** Bereken hoeveel procent meer zinnen die nieuwe tekst moet hebben om een even grote afname in de moeilijkheidsgraad op te leveren.

Als een tekst herschreven wordt maar $S$ niet verandert, dan moet gelden dat $1{,}0430 \cdot \sqrt{M \cdot \frac{30}{Z}} + 3{,}1291$ constant blijft.

4p **3** Beredeneer, dus zonder gebruik te maken van rekenvoorbeelden, dat hieruit volgt dat dan moet gelden: $Z = \text{constante} \cdot M$ .

Door een tekst te herschrijven in een tekst met meer zinnen, kun je $S$ kleiner maken. Als we ervan uitgaan dat van een tekst het aantal woorden met drie of meer lettergrepen 75 is en blijft, dan kun je de formule van $S$ herschrijven als

$$S = 1{,}0430 \cdot \sqrt{75} \cdot \sqrt{30} \cdot Z^{-\frac{1}{2}} + 3{,}1291$$

en dus als

$$S = 49{,}47 \cdot Z^{-\frac{1}{2}} + 3{,}1291$$

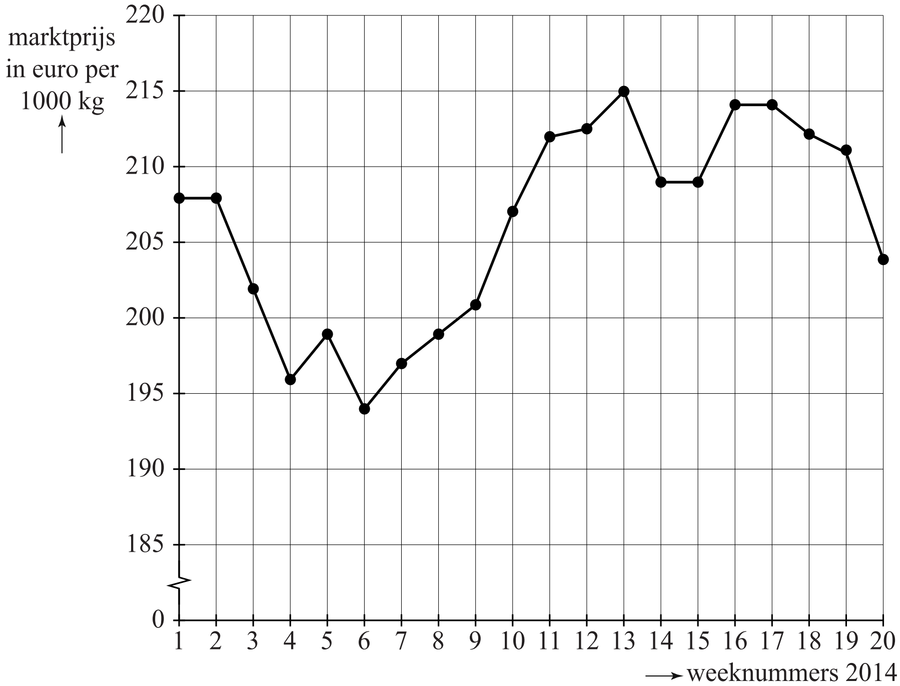
Die laatste formule kun je vervolgens differentiëren.

4p **4** Geef de formule van de afgeleide $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}Z}$ en leg met behulp van deze afgeleide uit dat $S$ afnemend daalt als de hoeveelheid zinnen groter wordt.

## Tarwe

Tarwe is één van de belangrijkste granen. Van tarwe wordt bloem gemalen en brood gemaakt. Aan het begin van iedere week wordt op de groothandelsbeurs van Rotterdam de actuele marktprijs van tarwe (in euro per 1000 kg) bekendgemaakt. Op de site productschapakkerbouw.nl zijn voor de eerste weken van 2014 deze marktprijzen door middel van stippen in een figuur gezet. De stippen zijn met lijnstukjes verbonden. Zie onderstaande figuur.

**figuur**




In de figuur zie je dat de marktprijs van week 3 naar week 4 gedaald is. Ook van week 13 naar week 14 is een daling te zien.

3p **5** Beredeneer, zonder berekening, in welk van beide perioden de procentuele daling van de marktprijs van tarwe het grootst is.

Er is een verband tussen de vraag naar tarwe en de prijs van tarwe. In het boek ‘Wiskunde voor economie’ wordt daarvoor de volgende prijs-vraag-formule vermeld:

$$p = 10\sqrt{-23q + 3800}$$

Hierin is $p$ de prijs in euro per 1000 kg en $q$ de vraag in 1000 kg per maand.

3p **6** Bereken de grootste gehele waarde van $q$ waarvoor deze prijs-vraag-formule nog betekenis heeft.

Op een bepaald moment wordt tarwe verhandeld voor 232 euro per 1000 kg.

4p **7** Bereken, uitgaande van de formule, met hoeveel kg per maand de vraag afneemt als de prijs toeneemt van 232 euro per 1000 kg naar 238 euro per 1000 kg. Rond je antwoord af op tientallen kilo's.

Men kan aantonen dat de totale maandopbrengst een maximale waarde heeft.

5p **8** Bereken, mede gebruikmakend van de formule, bij welke prijs per 1000 kg die maximale waarde bereikt wordt. Rond je antwoord af op hele euro's.

## Prille groei

Gemiddeld duurt een zwangerschap bij de mens 38 weken. Een ongeboren kind van 8 weken of ouder wordt een **foetus** genoemd.
In tabel 1 staat het (gemiddelde) lichaamsgewicht $G$ in gram van een foetus bij een leeftijd van $t$ weken.

**tabel 1**

| **Leeftijd $t$ in weken** | **Lichaamsgewicht $G$ in gram** |
|---|---|
| 8 | 4,7 |
| 10 | 21 |
| 15 | 160 |
| 20 | 480 |
| 25 | 990 |
| 30 | 1700 |
| 35 | 2700 |
| 38 | 3500 |

In deze opgave willen we onderzoeken welk model er bij tabel 1 zou kunnen passen.
Het eerste model dat we bekijken is dat van exponentiële groei:

$G = b \cdot a^t$ met $a$ en $b$ constanten.

Veronderstel dat de groei tussen week 8 en week 10 inderdaad exponentieel verloopt.

3p **9** Bereken met hoeveel procent **per week** het gewicht van de foetus dan toeneemt in die periode.

Exponentiële groei is echter geen goed model voor de groei van de foetus in de **gehele** periode van 8 tot 38 weken.

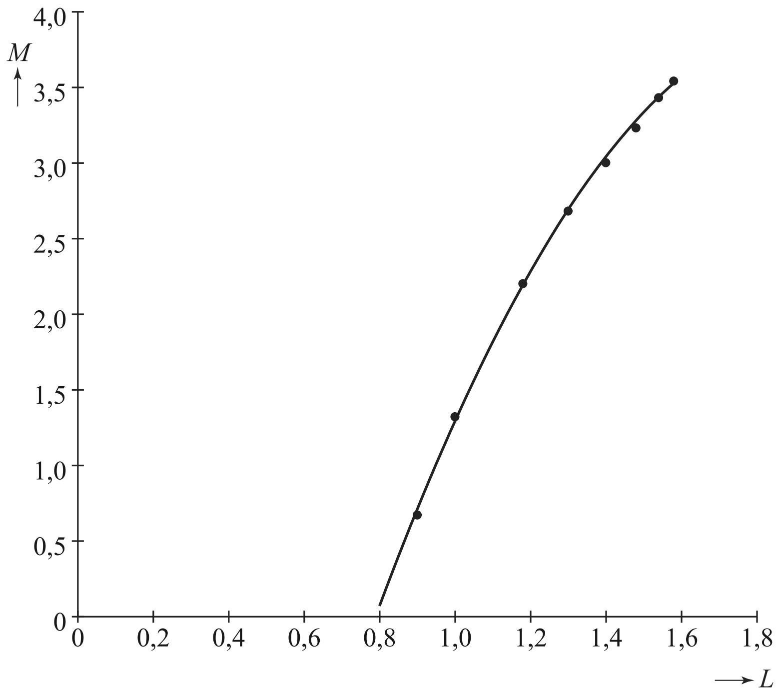
3p **10** Laat dat met een berekening zien.

Om een beter model voor de groei van de foetus te maken, berekenen we de logaritmes van de getallen in tabel 1.
We bekijken dus de waarden van $M = \log(G)$ ten opzichte van $L = \log(t)$.
Zie tabel 2 en de bijbehorende punten in figuur 1.

**tabel 2**

| $L = \log(t)$ | $M = \log(G)$ |
|---|---|
| 0,90 | 0,67 |
| 1,00 | 1,32 |
| 1,18 | 2,20 |
| 1,30 | 2,68 |
| 1,40 | 3,00 |
| 1,48 | 3,23 |
| 1,54 | 3,43 |
| 1,58 | 3,54 |

**figuur 1**




De punten in figuur 1 liggen bij benadering op een bergparabool. Deze parabool is in figuur 1 getekend. Bij deze parabool hoort de volgende formule:

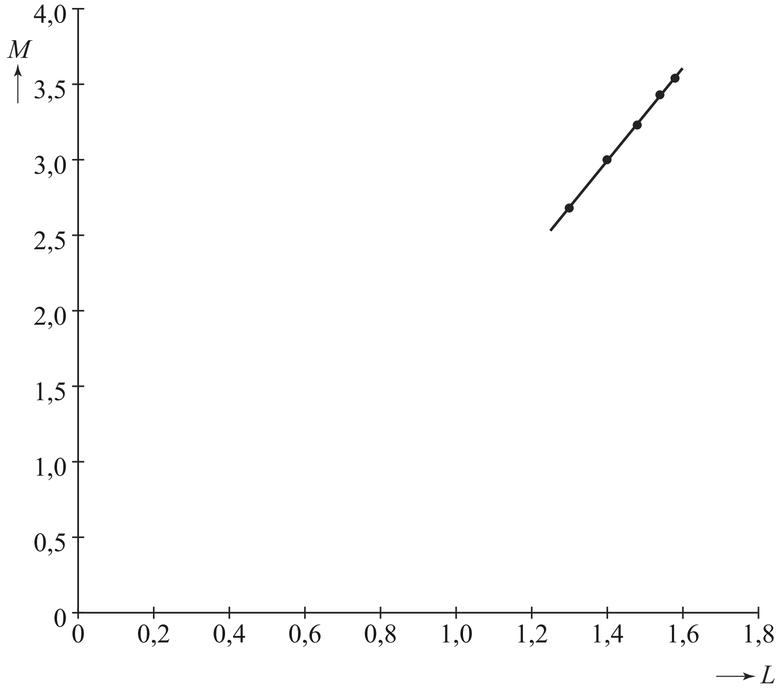
$$M = -7{,}131 + 11{,}305 \cdot L - 2{,}892 \cdot L^2$$

Als de parabool van figuur 1 de groei goed beschrijft, dan zou de grafiek moeten stijgen gedurende de hele zwangerschap.

4p **11** Bereken met behulp van de afgeleide functie $M'$ de waarde van $t$ waar de grafiek van $M$ weer gaat dalen en leg uit dat dit voor het model geen bezwaar is.

Voor een foetus van 20 weken en ouder blijkt een rechte lijn nog beter bij de punten in figuur 1 te passen dan de parabool van zojuist. Deze lijn is in figuur 2 getekend.

**figuur 2**




De vergelijking van deze lijn is:

$$M = -1{,}314 + 3{,}075 \cdot L$$

Omdat geldt $M = \log(G)$ en $L = \log(t)$ is deze vergelijking te schrijven als

$$\log(G) = -1{,}314 + 3{,}075 \cdot \log(t) \quad \text{(formule 1)}$$

Deze formule 1 is te herschrijven tot formule 2:

$$G = 0{,}0485 \cdot t^{3{,}075} \quad \text{(formule 2)}$$

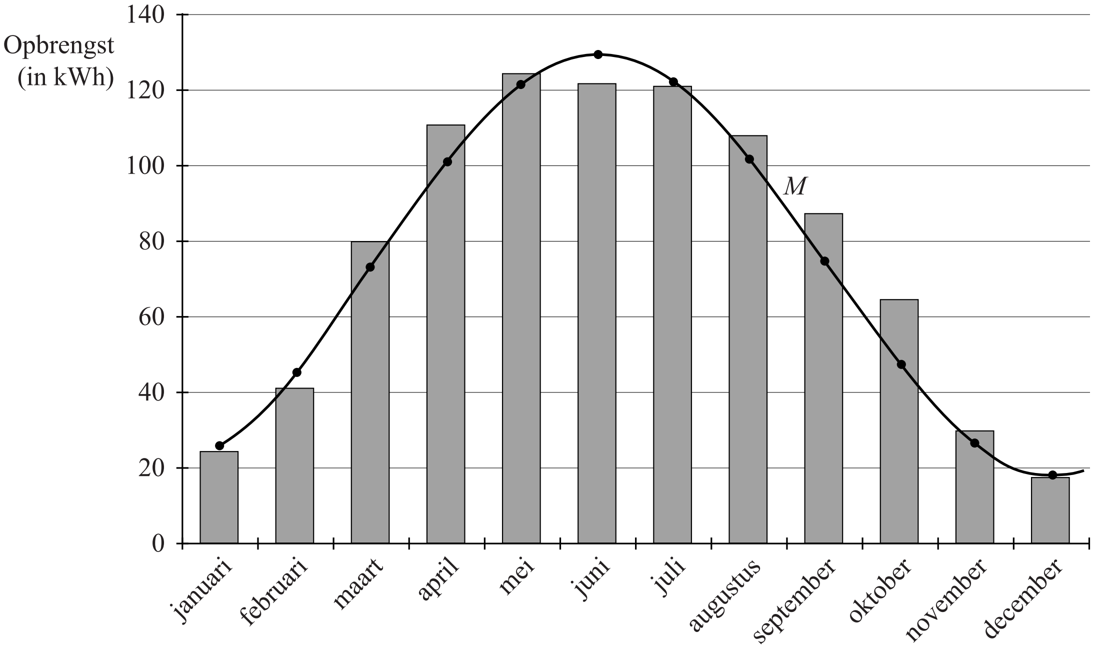
4p **12** Laat zien hoe je formule 1 kunt herleiden tot formule 2 of hoe je formule 2 kunt herleiden tot formule 1.

## Zonne-energie

Met zonnepanelen kan elektriciteit geproduceerd worden. De opbrengst van zonnepanelen varieert door het jaar heen: in de zomer is de opbrengst groter dan in de winter.

In de figuur zie je in het staafdiagram de gemiddelde **maandopbrengsten** van een zonnepanelensysteem bij Leiden. Om de gemiddelde maandopbrengsten te bepalen, worden de maandopbrengsten van de laatste 10 jaren gebruikt. De opbrengst wordt gemeten in kilowattuur (kWh).

**figuur**




De gemiddelde maandopbrengsten kunnen benaderd worden door een model: zie de kromme $M$ in de figuur. De werkelijke gemiddelde maandopbrengst wijkt relatief het meest af in oktober van de door het model voorspelde waarde.

4p **13** Licht toe hoe je in de figuur kunt zien dat die relatieve afwijking inderdaad in oktober het grootst is en bereken deze relatieve afwijking.

De kromme van de gemiddelde maandopbrengst $M$ in de figuur is een sinusoïde.

4p **14** Stel een formule op voor $M$ als functie van de tijd $t$ in maanden. Neem hierbij voor januari $t = 1$.

Bij een ander zonnepanelensysteem is voor elke dag in het jaar op basis van de gegevens van 10 jaar de gemiddelde **dagopbrengst** bepaald. De gemiddelde dagopbrengst kan benaderd worden met de formule:

$$D = 6{,}34 + 4{,}19\sin(0{,}0172(t - 74))$$

Hierin is $D$ de gemiddelde dagopbrengst in kWh en $t$ de tijd in **dagen** met $t = 1$ op 1 januari.

3p **15** Bereken op hoeveel dagen per jaar de gemiddelde dagopbrengst volgens deze formule groter is dan 10 kWh.

## Hink-stap-sprong

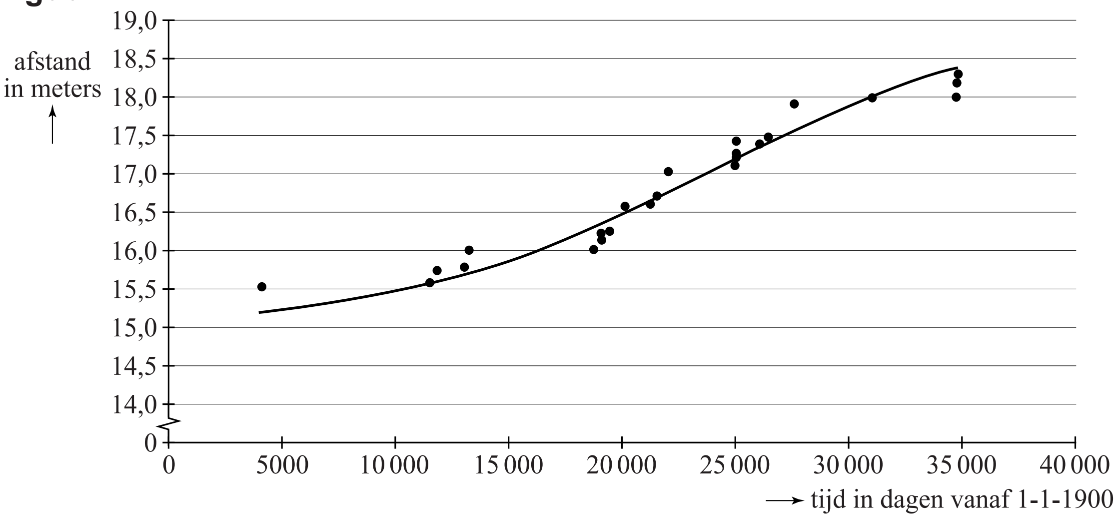
Het wereldrecord op het atletieknummer hink-stap-sprong is in de 20e eeuw 24 maal verbeterd. De tabel geeft hiervan een overzicht.

**tabel**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 30-5-1911 | 15,52 m | | 26-3-1955 | 16,56 m | | 5-8-1971 | 17,40 m |
| 27-10-1931 | 15,58 m | | 19-7-1958 | 16,59 m | | 17-10-1972 | 17,44 m |
| 14-8-1932 | 15,72 m | | 3-5-1959 | 16,70 m | | 15-10-1975 | 17,89 m |
| 14-12-1935 | 15,78 m | | 5-8-1960 | 17,03 m | | 16-6-1985 | 17,97 m |
| 6-8-1936 | 16,00 m | | 16-10-1968 | 17,10 m | | 18-7-1995 | 17,98 m |
| 30-9-1951 | 16,01 m | | 17-10-1968 | 17,22 m | | 7-8-1995 | 18,16 m |
| 23-7-1952 | 16,12 m | | 17-10-1968 | 17,23 m | | 7-8-1995 | 18,29 m |
| 23-7-1952 | 16,22 m | | 17-10-1968 | 17,27 m | | | |
| 19-7-1953 | 16,23 m | | 17-10-1968 | 17,39 m | | | |

Het verloop van het wereldrecord in de tijd wordt met stippen weergegeven in de onderstaande figuur.

**figuur**




Voor het verband tussen tijd $t$ (in dagen sinds 1 januari 1900, dus $t = 0$ op 1 januari 1900) en het wereldrecord $w$ in meters is door een wiskundige het volgende model opgesteld:

$$w = 15 + \frac{4}{1 + 36 \cdot e^{-0,00015t}}$$

Ook de grafiek die hoort bij dit model zie je in de bovenstaande figuur.

4p **16** Bereken met de formule in welk jaar volgens dit model het wereldrecord voor het eerst boven de 18 meter zou komen. Je hoeft hierbij geen rekening met schrikkeljaren te houden.

Volgens dit model zal het wereldrecord hink-stap-sprong op den duur naar een grenswaarde naderen.

3p **17** Beredeneer met behulp van de formule voor $w$ wat deze grenswaarde is.

Een formule voor de afgeleide functie van $w$ is $w'(t)=\dfrac{0,0216\cdot \mathrm{e}^{-0,00015t}}{(1+36\cdot \mathrm{e}^{-0,00015t})^2}$.

4p **18** Toon dit aan.

De afgeleide beschrijft met hoeveel meter het record (theoretisch) per dag stijgt.

5p **19** Bereken met behulp van de afgeleide in welk jaar het wereldrecord hink-stap-sprong volgens het model het **snelst** toenam en onderzoek of dit overeenkomt met de werkelijkheid. Je hoeft hierbij geen rekening met schrikkeljaren te houden.

Veel mensen meten de tijd liever in jaren dan in dagen. Voor hen stelt de wiskundige een andere formule op, van de vorm

$$w=15+\frac{4}{1+36\cdot \mathrm{e}^{\cdots\cdots j}}$$

Hierin is $j$ de tijd in jaren, waarbij $j=0$ overeenkomt met 1 januari 1900.

3p **20** Bepaal de waarde van het getal dat op de puntjes voor $j$ moet staan. Je hoeft hierbij geen rekening met schrikkeljaren te houden.

## Lengteverschil

Het Centraal Bureau voor de Statistiek schreef in december 2012 het volgende:

> Nederlanders steeds langer maar vooral dikker
>
> Nederlanders groeien nog steeds, zowel in de lengte als in de breedte. In de afgelopen twintig jaren is de Nederlander een stuk zwaarder geworden. Het gemiddelde gewicht van vrouwen is vanaf 1991 tot en met 2011 met 3,7 kg toegenomen tot 70 kg. Bij mannen is deze toename aanzienlijk groter.

De schrijver van het artikel baseert deze conclusies op berekeningen met de **gemiddelde Body Mass Index** ($GBMI$).

De $GBMI$ berekent men met de formule $GBMI = \frac{\text{gemiddeld gewicht}}{(\text{gemiddelde lengte})^2}$.

Hierbij wordt het gewicht uitgedrukt in kg en de lengte in meters.

In de figuur hieronder staat het gemiddelde gewicht van mannen vanaf 1991. In de tabel vind je de $GBMI$ voor zowel mannen als vrouwen voor de jaren 1991, 1993, 1995, 1997, 1999, 2001, 2003, 2005, 2007, 2009 en 2011.

**figuur**

**tabel** GBMI

| jaar | mannen | vrouwen |
|---|---|---|
| 1991 | 24,5234 | 23,8013 |
| 1993 | 24,6009 | 23,8160 |
| 1995 | 24,7014 | 24,1383 |
| 1997 | 24,8521 | 24,3890 |
| 1999 | 25,0707 | 24,5094 |
| 2001 | 25,3247 | 24,7004 |
| 2003 | 25,4116 | 24,8133 |
| 2005 | 25,4167 | 24,8073 |
| 2007 | 25,5135 | 24,8133 |
| 2009 | 25,6097 | 24,9440 |
| 2011 | 25,6686 | 24,9499 |

Met behulp van de gegevens kun je aantonen dat Nederlanders sinds 1991 gemiddeld een stuk langer zijn geworden. Vooral mannen worden steeds langer. Het verschil in gemiddelde lengte tussen mannen en vrouwen neemt nog steeds toe.

Een wetenschapsjournalist beweert: “Als we aannemen dat het lengteverschil vanaf 1991 ieder jaar evenveel toeneemt, zal dit verschil in 2030 al meer dan 16 cm zijn.”

8p **21** Onderzoek met behulp van de gegevens in het artikel, de figuur en de tabel of deze bewering waar is.