Examen VWO
2013

tijdvak 1
woensdag 22 mei
13.30 tijd - 16.30 uur

wiskunde A (pilot)

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 21 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 83 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

OVERZICHT FORMULES

Differentiëren

naam van de regel	functie	afgeleide
somregel	$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$
productregel	$p(x) = f(x) \cdot g(x)$	$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
quotiëntregel	$q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
kettingregel	$k(x) = f(g(x))$	$k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ of $\dfrac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g} \cdot \dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$

Logaritmen

regel	voorwaarde
${}^{g}\log a + {}^{g}\log b = {}^{g}\log ab$	$g > 0,\ g \neq 1,\ a > 0,\ b > 0$
${}^{g}\log a - {}^{g}\log b = {}^{g}\log \dfrac{a}{b}$	$g > 0,\ g \neq 1,\ a > 0,\ b > 0$
${}^{g}\log a^{p} = p \cdot {}^{g}\log a$	$g > 0,\ g \neq 1,\ a > 0$
${}^{g}\log a = \dfrac{{}^{p}\log a}{{}^{p}\log g}$	$g > 0,\ g \neq 1,\ a > 0,\ p > 0,\ p \neq 1$

Zevenkamp

Een relatief jong atletieknummer van de Olympische Spelen is de zevenkamp voor vrouwen. De vrouwen strijden in twee dagen op zeven verschillende baan- en veldonderdelen. De baanonderdelen zijn 100 meter horden, 200 meter en 800 meter hardlopen. De veldonderdelen zijn hoogspringen, kogelstoten, verspringen en speerwerpen.
De prestaties van elk onderdeel worden omgerekend naar punten. Deze punten worden vervolgens bij elkaar opgeteld waarna een ranglijst kan worden opgesteld.

De punten worden als volgt berekend:

- $Punten = A \cdot (B - X)^C$ voor baanonderdelen
- $Punten = A \cdot (X - B)^C$ voor veldonderdelen
- De puntenaantallen worden altijd naar beneden afgerond

A, B en C zijn constanten die per onderdeel verschillen, zoals te zien is in tabel 1 hieronder. X is de prestatie van de atleet in eenheden zoals deze in de laatste kolom staat weergegeven.

tabel 1

onderdeel	A	B	C	**eenheden**
100 m horden	9,23076	26,7	1,835	seconden
hoogspringen	1,84523	75	1,348	centimeters
kogelstoten	56,0211	1,5	1,05	meters
200 m hardlopen	4,99087	42,5	1,81	seconden
verspringen	0,188807	210	1,41	centimeters
speerwerpen	15,9803	3,8	1,04	meters
800 m hardlopen	0,11193	254	1,88	seconden

Jacky Joyner behaalde in 1988 een wereldrecord op de zevenkamp voor vrouwen. In onderstaande tabel 2 staan per onderdeel de punten van Joyner en van Sabine John, de nummer 2.

tabel 2

rang	**naam**	**100 m horden**	**hoog**	**kogel**	**200 m**	**ver**	**speer**	**800 m**	**totaal**
1	Joyner	1172	1054	915	1123	1264	776	987	7291
2	John	1147	978	943	1015	1076	716	1022	6897

Voor de 100 meter horden geldt de volgende formule:

$$P_{100\text{m}} = 9,23076 \cdot (26,7 - X)^{1,835}$$

Hierbij is $P_{100\text{m}}$ de hoeveelheid punten voor dit onderdeel en X de tijd op dit onderdeel in seconden.
Met behulp van tabel 2 en de formule kun je de tijd van Joyner berekenen op de 100 meter horden.

3p **1** Bereken de tijd van Joyner op de 100 meter horden in 2 decimalen nauwkeurig.

Aan de formules is te zien dat de puntenaantallen voor veldonderdelen in theorie onbeperkt groot kunnen worden. Je zou een speer 1000 meter ver kunnen werpen, dat levert veel punten op. Er is geen bovengrens. Aan de formules is ook te zien dat de puntenaantallen voor de baanonderdelen wel een bovengrens hebben.

5p **2** Bereken de bovengrens voor de 100 meter horden en bereken vervolgens hoe ver een atlete moet springen om ten minste ditzelfde aantal punten te behalen voor het onderdeel verspringen.

Met de afgeleide van de formule voor de 200 meter, $P_{200\text{m}}$, met de tijd X tussen 0 seconden en 42,5 seconden, is na te gaan of $P_{200\text{m}}$ toenemend stijgend, toenemend dalend, afnemend stijgend of afnemend dalend is.

6p **3** Bepaal deze afgeleide en onderzoek met behulp van een schets van de grafiek van deze afgeleide of $P_{200\text{m}}$ toenemend stijgend, toenemend dalend, afnemend stijgend of afnemend dalend is.

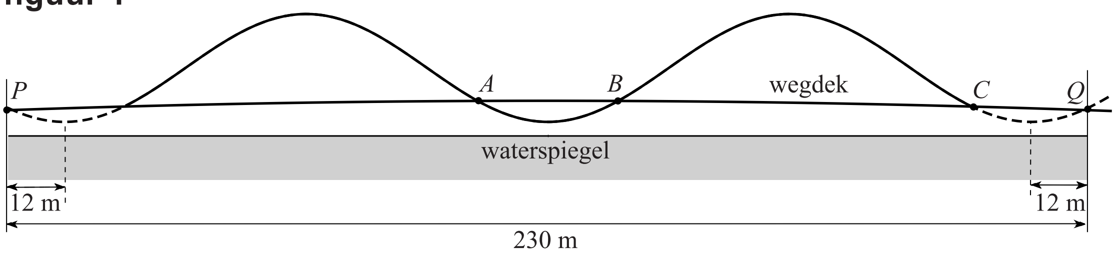
Brug

Op de foto zie je de Enneüs Heermabrug in Amsterdam. De brug bestaat uit golvende bogen: een verticaal geplaatste middenboog en twee schuin geplaatste buitenste bogen. Het wegdek is met hangstangen opgehangen aan deze bogen.

foto

In onderstaande figuur 1 zie je een model van deze brug. De golvende middenboog is met een sinusoïde weergegeven, de waterspiegel met een rechte lijn en het wegdek met een heel licht gebogen lijn.

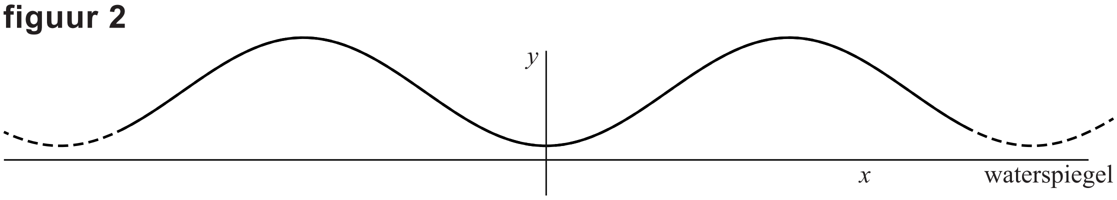
figuur 1



In figuur 1 zijn tevens enkele maten aangegeven: de brug is in totaal 230 meter lang. De sinusoïde is links en rechts met een stippellijn voortgezet: op 12 m afstand van de uiteinden van de brug bevindt zich een laagste punt. De hoogste punten van de boog bevinden zich op 26 m boven de waterspiegel en het laagste punt op 3 meter.

Voor de sinusoïde van figuur 1 kunnen we een formule opstellen van de vorm $y = a + b\sin(c(x-d))$. Als we in de figuur als x-as de waterspiegel nemen en de y-as door het midden van de brug laten gaan (zie figuur 2), wordt deze formule: $y = 14{,}5 + 11{,}5\sin(0{,}061(x - 25{,}75))$ met x en y in meters.

figuur 2



4p **4** Licht toe hoe je met behulp van de gegeven maten de waarden voor a, b, c en d in deze formule kunt berekenen.

We kunnen het assenstelsel ook op een andere manier aanbrengen. Voor de volgende vraag gaan we uit van een assenstelsel waarbij de y-as door het punt P in figuur 1 gaat en de x-as de waterspiegel blijft.
In dat geval ziet de formule voor de sinusoïde van figuur 1 er anders uit.

3p **5** Geef een mogelijke formule voor deze situatie. Licht je antwoord toe.

We gaan nu weer uit van de waterspiegel als x-as en de y-as door het midden van de brug: zie figuur 2. Het wegdek is in figuur 1 geen rechte, maar een licht gebogen lijn in de vorm van een parabool met een formule van de vorm: $y = px^2 + q$. In het midden bevindt het wegdek zich op 7,5 m boven de waterspiegel. Je kunt nu de **horizontale** afstand tussen de twee middelste snijpunten van boog en wegdek, dus de punten A en B (zie figuur 1), berekenen. Van punt A is gegeven dat de x-coördinaat gelijk is aan (ongeveer) –15.

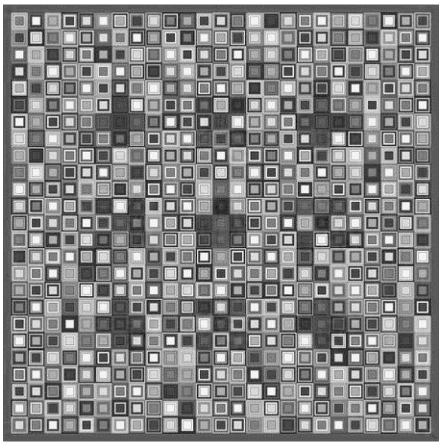
2p **6** Bereken de horizontale afstand tussen de punten A en B.

6p **7** Bereken de waarden van p en q in de wegdekformule $y = px^2 + q$.

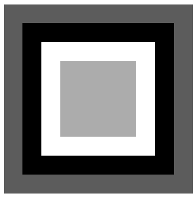
Vierkanten

Op de foto hieronder zie je een kunstwerk van Margaret Kepner, dat opgebouwd is uit 25 bij 25 vierkanten. Elk van deze vierkanten bestaat uit een klein vierkant en drie vierkante ‘randen’ eromheen. Elk van deze vier onderdelen kan wit, lichtgrijs, middelgrijs, donkergrijs of zwart zijn. In figuur 1 en figuur 2 zie je hier voorbeelden van. De vier onderdelen van het vierkant van figuur 1 zijn van buiten naar binnen respectievelijk donkergrijs, zwart, wit en lichtgrijs. Eenzelfde kleur kan ook meer keren voorkomen: zie figuur 2. En verder voor de duidelijkheid: twee onderdelen naast elkaar mogen ook dezelfde kleur hebben.

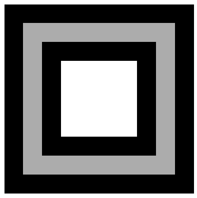
foto



figuur 1



figuur 2



3p **8** Bereken hoeveel verschillende vierkanten er op deze manier gemaakt kunnen worden.

De vierkanten stellen getallen voor. De kleuren corresponderen met cijfers: wit = 0, lichtgrijs = 1, middelgrijs = 2, donkergrijs = 3 en zwart = 4. Het cijfer van de buitenste rand moet vermenigvuldigd worden met 125, dat van de rand daarbinnen met 25, dat van de binnenste rand met 5 en dat van het binnenste vierkant met 1. In figuur 1 is dus het getal $3 \times 125 + 4 \times 25 + 0 \times 5 + 1 \times 1 = 476$ weergegeven.
Figuur 2 bevat behalve de kleuren zwart en wit ook nog de kleur lichtgrijs.

3p **9** Bereken op dezelfde manier welk getal in figuur 2 afgebeeld is.

In het kunstwerk komen alle getallen van 0 tot en met 624 precies één keer voor. Deze getallen zijn zó gerangschikt dat, als je alle getallen in een rij bij elkaar optelt, dit steeds hetzelfde getal oplevert: het **magische getal**. Ook als je alle getallen in een kolom bij elkaar optelt, komt ditzelfde magische getal er uit. In figuur 3 zie je hiervan een voorbeeld voor een kunstwerk van 3 bij 3 getallen: het magische getal is hier 12.

figuur 3

5	0	7
6	4	2
1	8	3

Het magische getal van het kunstwerk kan men berekenen door alle getallen van 0 tot en met 624 bij elkaar op te tellen en de uitkomst vervolgens te delen door het aantal rijen: elke rij moet immers bij optellen hetzelfde getal opleveren.
Voor een rij getallen zoals in dit kunstwerk geldt de volgende formule:

$$som = 0{,}5 \cdot aantal\ \ termen \cdot (eerste\ term + laatste\ term)$$

4p **10** Bereken met behulp van de bovenstaande formule het magische getal van het kunstwerk.

In het algemeen geldt voor een kunstwerk van p bij p getallen waarin elk getal van 0 tot en met $p^2 - 1$ precies één keer voorkomt, de volgende formule voor het magische getal:

$$magisch\ getal = 0{,}5 \cdot p \cdot (p^2 - 1)$$

Deze formule voor het magische getal is af te leiden door te bedenken dat het magische getal gelijk is aan de som van alle getallen in het kunstwerk gedeeld door het aantal rijen.

5p **11** Toon, zonder getallenvoorbeelden, aan dat de formule voor het magische getal juist is. Gebruik daarbij voor het berekenen van de som van de getallen de formule $som = 0{,}5 \cdot aantal\ \ termen \cdot (eerste\ term + laatste\ term)$.

Voor een expositie wil een andere kunstenaar een werk maken vergelijkbaar met dat van Margaret Kepner van hierboven. Dit kunstwerk is een stuk kleiner en moet opgebouwd zijn uit p bij p vierkantjes die verschillende getallen voorstellen. De kunstenaar wil weten bij welke waarden van p het magische getal van zo'n kunstwerk ligt tussen 500 en 1000.

4p **12** Bereken voor welke waarden van p dat het geval is.

Lichaamsoppervlak

De buitenkant van je lichaam is je lichaamsoppervlak. Gegevens over iemands lichaamsoppervlak worden bijvoorbeeld gebruikt voor risico-analyse bij bestrijdingsmiddelen. De schadelijke stoffen hierin kunnen via de huid in het lichaam worden opgenomen. In een rapport van het RIVM (Rijksinstituut voor Volksgezondheid en Milieu) is een tabel te vinden waarin onder andere de lichaamsoppervlakte is af te lezen. Een gedeelte van deze tabel is hieronder weergegeven.

tabel

	lichaamsoppervlakte in % van de totale oppervlakte			
leeftijd	hoofd	romp	armen en handen	benen en voeten
1,5 jaar	16,2	34,0	18,15	31,65
17,5 jaar	8,1	32,1	21,0	38,8

Bij jonge kinderen is het hoofd ten opzichte van de rest van het lichaam relatief groot. Als kinderen ouder worden, groeien de armen en handen en de benen en voeten sneller dan de rest van het lichaam.

Het aandeel van armen en handen in de lichaamsoppervlakte is voor kinderen in de periode van 1,5 jaar tot 17,5 jaar gestegen van 18,15% naar 21,0%. Ook het aandeel van de benen en voeten is in die 16 jaar groter geworden.

3p **13** Onderzoek of de relatieve toename van het aandeel van armen en handen groter is dan de relatieve toename van het aandeel van benen en voeten.

Er zijn ook formules waarmee we de lichaamsoppervlakte kunnen berekenen. Voor volwassen vrouwen is de volgende formule de meest gebruikte formule:

$$S_{\text{Dubois}} = 0{,}007184 \cdot L^{0{,}725} \cdot M^{0{,}425} \qquad \text{(formule van Dubois)}$$

In deze formule is S_{Dubois} de lichaamsoppervlakte in m^2, L de lichaamslengte in cm en M het lichaamsgewicht in kg.

Als een lichaam groter wordt, dan zal de lichaamsoppervlakte ook groter worden. Kunnen we dit ook zien aan de formule van Dubois? Hoe zit het bijvoorbeeld als alle lengtematen (lengte, breedte, hoogte) van een lichaam 2 keer zo groot worden? Bij een kubus wordt in dat geval de oppervlakte 4 keer en het volume 8 keer zo groot. Wordt de uitkomst van de formule van Dubois dan ook 4 keer zo groot?
Hiertoe vergelijken we $S_{\text{Dubois (2)}} = 0{,}007184 \cdot (2L)^{0{,}725} \cdot (8M)^{0{,}425}$ met $S_{\text{Dubois (1)}} = 0{,}007184 \cdot L^{0{,}725} \cdot M^{0{,}425}$. We gaan er hierbij van uit dat het lichaamsgewicht (M) evenredig is met het volume.

4p **14** Toon met behulp van deze formules (zonder getallenvoorbeelden) aan dat de formule van Dubois inderdaad bij verdubbeling van lengtematen een verviervoudiging van de lichaamsoppervlakte S_{Dubois} oplevert.

Bij een volwassen vrouw met een lengte van 1,75 m hoort, uitgaande van de bovenstaande formule van Dubois, de formule

$$S_{\text{Dubois}} = 0{,}303787 \cdot M^{0{,}425}$$

3p **15** Bereken door middel van differentiëren van deze laatste formule de waarde van de afgeleide voor $M = 66$ kg en leg uit wat de betekenis is van die waarde.

Voor het berekenen van de lichaamsoppervlakte bij kinderen worden vooral de volgende twee formules gebruikt:

$$S_{\text{Mosteller}} = \sqrt{\tfrac{1}{3600} \cdot L \cdot M} \quad \text{(formule van Mosteller)}$$

$$S_{\text{Haycock}} = 0{,}024265 \cdot L^{0{,}3964} \cdot M^{0{,}5378} \quad \text{(formule van Haycock)}$$

Ook in deze formules is S de lichaamsoppervlakte in m^2, L de lichaamslengte in cm en M het lichaamsgewicht in kg.

Om de formules beter met elkaar te kunnen vergelijken is het handig om de formule van Mosteller in dezelfde vorm te schrijven als de formule van Haycock.

3p **16** Schrijf de formule van Mosteller in de vorm $S = c \cdot L^a \cdot M^b$ en licht toe hoe je je antwoord gevonden hebt.

Dialecten vergelijken

Taalkundigen doen veel onderzoek naar de dialecten in Nederland en Vlaanderen.
Onderzoeker M. Spruit onderzocht in 2008 in hoeverre dialecten op elkaar lijken. De mate waarin twee dialecten verschillen, wilde hij uitdrukken in een getal. Daarom vergeleek hij steeds twee dialecten op een aantal kenmerken en telde hij vervolgens de verschillen. Elk verschil tussen deze twee dialecten leverde een punt op. Het totale aantal punten is de **Hammingafstand** tussen deze twee dialecten.
Bijvoorbeeld: in Lunteren kan men zeggen: “Jan herinnert **zich** dat verhaal wel”, maar ook: “Jan herinnert **z’n eigen** dat verhaal wel”. In Veldhoven zegt men altijd: “Jan herinnert **zich** dat verhaal wel”. In geen van beide dialecten gebruikt men hier “**hem**” of “**zichzelf**” of “**hemzelf**”, iets dat in andere dialecten wel voorkomt.

Het vergelijken van deze vijf kenmerken levert dus in totaal 1 punt op voor de Hammingafstand. Dat is in tabel 1 weergegeven.

tabel 1

	Lunteren	Veldhoven	punten (voor Hammingafstand)
zich	+	+	0
hem	–	–	0
z’n eigen	+	–	1
zichzelf	–	–	0
hemzelf	–	–	0

Stel men vergelijkt dialect X met het dialect van Lunteren. En stel dat vergelijken van de vijf kenmerken uit tabel 1 in totaal 3 punten oplevert voor de Hammingafstand. In dialect X wordt ook “zich” gebruikt.

4p **17** Schrijf alle mogelijkheden voor deze vijf kenmerken voor dialect X op. Gebruik hiervoor de tabel op de uitwerkbijlage.

De onderzoeker vergeleek niet vijf, maar 507 kenmerken. Het resultaat is een tabel waarin per tweetal dialecten de Hammingafstand te zien is. In tabel 2 zie je hier een gedeelte van.
Het getal 66 in deze tabel voor het tweetal Lunteren-Bellingwolde (of Bellingwolde-Lunteren) betekent dat bij deze twee dialecten 66 van de 507 kenmerken verschillen: de Hammingafstand is 66.

tabel 2

Dialect	**Lunteren**	**Bellingwolde**	**Hollum**	**Doel**	**Sint-Truiden**	**Veldhoven**
Lunteren	–	66	52	122	77	47
Bellingwolde	66	–	56	134	81	51
Hollum	52	56	–	116	63	59
Doel	122	134	116	–	115	111
Sint-Truiden	77	81	63	115	–	72
Veldhoven	47	51	59	111	72	–

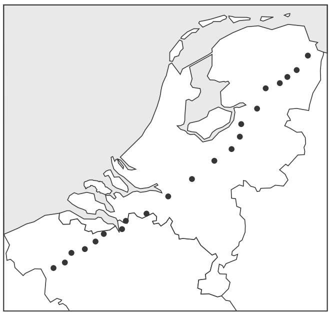
In tabel 2 heeft de onderzoeker dus 15 Hammingafstanden berekend.
In totaal stonden er echter geen 6 dialecten, maar 267 dialecten in de tabel. Bij elk tweetal heeft de onderzoeker de Hammingafstand berekend.

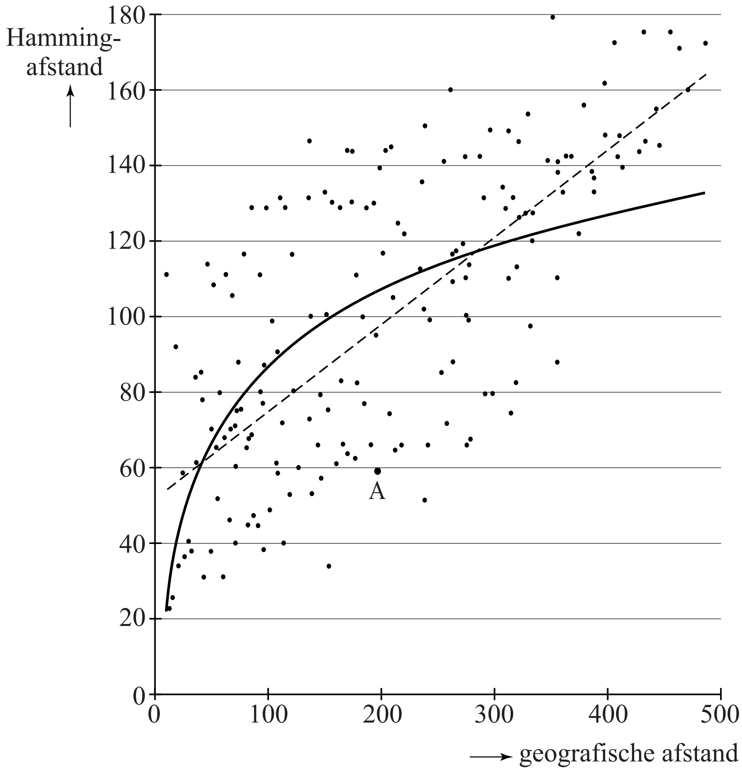
3p **18** Bereken hoeveel Hammingafstanden de onderzoeker in totaal heeft berekend.

De onderzoeker zocht naar een verband tussen de geografische afstand en de Hammingafstand van dialecten. In het kaartje in de figuur op de volgende pagina zie je een aantal dialecten met stippen aangegeven. In het assenstelsel is voor elk tweetal dialecten de Hammingafstand (in punten) uitgezet tegen de geografische afstand (in km).
In het assenstelsel kun je zien dat bij punt A de afstand tussen twee plaatsen gelijk is aan 200 km en de Hammingafstand ongeveer gelijk is aan 58.

De onderzoeker heeft op twee manieren geprobeerd het verband tussen de geografische afstand en de Hammingafstand met een wiskundig verband te benaderen. Beide manieren, een lineair verband en een logaritmisch verband, zijn weergegeven in het assenstelsel.

figuur





De onderzoeker heeft in het assenstelsel dus ook een grafiek voor een logaritmisch verband getekend. De formule voor dit logaritmische verband is:

$$H = -45{,}88 + 28{,}85 \cdot \ln(x)$$

Hierin is H de Hammingafstand en x de geografische afstand in km.

Op de getekende rechte lijn liggen de punten (10, 55) en (400, 145).

5p **19** Stel met behulp van deze twee punten een formule op voor het lineaire verband in het assenstelsel en bereken met behulp van de formules bij welke geografische afstanden de Hammingafstanden volgens het lineaire en het logaritmische verband gelijk zijn. Rond je antwoord af op gehele kilometers.

De grafiek van het logaritmische verband in het assenstelsel gaat bijvoorbeeld door de punten (50, 67), (100, 87), (200, 107) en (400, 127). Hieraan kun je zien dat volgens het logaritmisch verband bij een verdubbeling van de geografische afstand de Hammingafstand steeds met 20 toeneemt. Met behulp van de formule $H = -45{,}88 + 28{,}85 \cdot \ln(x)$ kun je aantonen dat dit altijd zo is.

3p **20** Toon met behulp van de rekenregels van de logaritmen aan dat $-45{,}88 + 28{,}85 \cdot \ln(2x)$ ongeveer gelijk is aan $-45{,}88 + 28{,}85 \cdot \ln(x) + 20$.

Vaatwasser

Martin heeft een nieuwe vaatwasser gekocht. Bij de aflevering vertelde de monteur het volgende:

> "Ik gebruik thuis altijd het korte programma in plaats van het normale programma, want dat is goedkoper. Je moet de vaat dan wel even met de hand voorspoelen, dat kost je ongeveer 10 liter per keer en dat water wordt met gas verwarmd. In de vaatwasser wordt het water met elektriciteit verwarmd en dat is duurder. Gebruik daarom zoveel mogelijk het korte programma."

In de onderstaande tabel zie je enkele gegevens over het verbruik van de vaatwasser, afkomstig uit de handleiding.

tabel

programma	**normaal programma**	**kort programma**
programmaduur in minuten	155	60
vermogen in kW (kilowatt)	0,58	1,00
waterverbruik in liters	15	10

Behalve met gegevens uit deze tabel moet Martin rekening houden met de 10 liter water die hij volgens de monteur bij het voorspoelen moet gebruiken. Martin moet dus een schatting maken van de kosten aan water en het verwarmen daarvan bij het voorspoelen.

Martin heeft verder de volgende informatie verzameld:

– Water kost 1,22 euro per m^3.
– Gas kost 0,54 euro per m^3.
– De hoeveelheid energie die een apparaat met een vermogen van 1 kW in 1 uur verbruikt, noemen we 1 kWh (kilowattuur); een apparaat met een vermogen van 0,2 kW gebruikt in 0,5 uur dus $0,2 \cdot 0,5 = 0,10$ kWh.
– Elektriciteit kost 0,22 euro per kilowattuur (kWh).

Als Martin voorspoelt, gaan we ervan uit dat hij 1280 m^3 gas per jaar verbruikt. Driekwart daarvan gaat op aan verwarming. De rest wordt gebruikt voor het verwarmen van water voor het bad en de douche, het voorspoelen, enzovoort. Martin schat dat hij voor het met de hand voorspoelen circa 10% van die rest gaat gebruiken.

7p **21** Onderzoek hoe groot het prijsverschil per vaatwasbeurt is tussen het normale programma en het korte programma met voorspoelen en geef met argumenten aan wat je vindt van de opmerking van de monteur.