

PARAGRAAF 3.1 : HET KANSBEGRIIP

LES 1 KANSEN MET DOBBELSTENEN

DEFINITIE

- # = { Aantal }
- $P(\dots) = \{ \text{Kans dat } \dots \}$
- $P(\dots) = \frac{\# \text{ Gunstige uitkomsten}}{\# \text{ Totale uitkomsten}} = \frac{\#(G)}{\#(U)}$

VOORBEELD 1

Wim gooit met 2 dobbelstenen. Hij kijkt naar de som.

- a. Stel de verzameling U op (= alle mogelijke uitkomsten)

Bereken de kans dat :

- b. Het product van de ogen precies 12 is.
c. Het product hoogstens 5 is.

OPLOSSING 1

a. $U = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

b. $P(\text{product} = 12) = \frac{4}{36}$

c. $P(\text{product hoogstens } 5) = \frac{10}{36}$

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

LES 2 KANSEN BEREKENEN**DEFINITIE**

- In de kansrekening geldt : **EN = × OF = +**
- Hoe bereken je de kans als je een aantal keren achter elkaar een experiment uitvoert ?
 $P(\dots)$ = kans op één rijtje \times het aantal verschillende rijtjes

VOORBEELD 1

Wouter beantwoordt 5 ABCD vragen. Hij gokt ze allemaal. Bereken de kans dat :

- Hij vier keer goed gokt.
- Hij twee keer goed gokt.
- Hij hoogstens 1 keer goed gokt..

OPLOSSING 1

- $P(\text{GGGGF})$ = kans op één rijtje \times aantal mogelijke rijtjes

$$P(\text{GGGGF}) = \binom{5}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^4 \times \left(\frac{3}{4}\right) = 0,0146$$

- $P(\text{GGFFF}) = \binom{5}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 0,2637$

PARAGRAAF 3.3 : HET VAASMODEL

LES 1 : KANSEN

HERHALEN KANSEN BEREKENEN

Hoe bereken je een kans. Dat kan op twee manieren :

$$(1) P(\dots) = \frac{\# \text{ Gunstige uitkomsten}}{\# \text{ Totale uitkomsten}} = \frac{\#(G)}{\#(U)} \quad (\text{kans op één experiment})$$

$$(2) P(\dots) = \text{kans op één rijtje} \times \text{het aantal rijtjes} \quad (\text{meerdere experimenten})$$

VOORBEELD 1

In een vaas zitten 2 blauwe, 5 groene en 8 rode knikkers. Guus pakt 3 knikkers. Bereken de kans dat:

- Hij 2 groene en een blauwe pakt.
- Hij 3 verschillende kleuren heeft.

OPLOSSING 1

We zullen bij beide vragen beide oplossingen laten zien :

$$a. (1) P(GGB) = \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{2}{13} \cdot \binom{3}{2} = 0,044$$

$$(2) P(GGB) = \frac{\binom{5}{2} \binom{2}{1} \binom{8}{0}}{\binom{15}{3}} = \frac{10 \cdot 2 \cdot 1}{455} = 0,044$$

$$b. (1) P(RGB) = \frac{8}{15} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{2}{13} \cdot \binom{6}{1} = 0,176$$

$$(2) P(RGB) = \frac{\binom{5}{1} \binom{2}{1} \binom{8}{1}}{\binom{15}{3}} = 0,176$$

VOORBEELD 2

Op een training zijn er 4 paarse, 3 witte en 8 rode hesjes. De trainer pakt uit de stapel 3 hesjes

Bereken de kans dat:

- hij 2 of 3 rode pakt.
- hij minder dan 3 witte pakt.

OPLOSSING 2

$$\text{a. } P(\text{RRR}) \text{ of } P(\text{RRR}) = \frac{\binom{8}{2} \binom{7}{1}}{\binom{15}{3}} + \frac{\binom{8}{3} \binom{7}{0}}{\binom{15}{3}} = 0,554$$

$$\text{b. } P(\text{WWW}) \text{ of } P(\text{WWW}) \text{ of } P(\text{WWW}) = \frac{\binom{3}{0} \binom{12}{3}}{\binom{15}{3}} + \frac{\binom{3}{1} \binom{12}{2}}{\binom{15}{3}} + \frac{\binom{3}{2} \binom{12}{1}}{\binom{15}{3}} = 0,998$$

VOORBEELD 3

Wim gooit met twee gewone dobbelstenen en één viervlaksdobbelssteen. Bereken de kans dat :

- Ze als som 15 gooien.
- Er precies één 5 gegooid wordt.
- Met elke dobbelsteen minimaal 4 ogen gegooid wordt.

Hans gooit met één dobbelsteen. Hij stopt als hij zes gooit.

- Bereken de kans dat hij vijf keer moet gooien.

OPLOSSING 3

Het laatste getal is hier de viervlaksdobbelsteen !!

- a. Som = 15 → 663 of 654 of 564

$$P(663) + P(654) + P(564) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{4}$$

$$P(663) + P(654) + P(564) = \frac{1}{144} + \frac{1}{144} + \frac{1}{144} = \frac{3}{144}$$

- b. Eén 5 → 5 5 5 of 5-5 5 (555 kan niet want het is een viervlaks !!)

$$P(5 \overline{5} \overline{5}) + P(\overline{5} \overline{5} 5) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{4}{4} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{4}{4}$$

$$P(5 \overline{5} \overline{5}) + P(\overline{5} \overline{5} 5) = \frac{20}{144} + \frac{20}{144} = \frac{40}{144} (= \frac{5}{18})$$

- c. Noem 4 of hoger even H (Hoog) en

Met elke dobbelsteen H → HHH

$$P(HHH) = \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{9}{144} (= \frac{1}{16})$$

- d. $P(\overline{6} \overline{6} \overline{6} \overline{6} 6) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = (\frac{5}{6})^4 \times \frac{1}{6} = \frac{625}{7776} \approx 0,0804$

PARAGRAAF 3.4 : DE COMPLEMENTREGEL

LES 1 : COMPLEMENTREGEL

DEFINITIE COMPLEMENTREGEL

- De complementregel gebruik je als de kans die je NIET wil berekenen veel makkelijker / korter is dan de kans die je wel wil berekenen.
- $P(A) + P(\text{niet } A) = 1$
 $P(A) = 1 - P(\text{niet } A)$

VOORBEELDEN

Je gooit met twee dobbelstenen. Je kijkt naar de som.

$$\begin{aligned} \text{(1) } P(\text{minstens } 3) &= P(3) + P(4) + P(5) \dots + P(12) \\ &= 1 - P(2) = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(2) } P(\text{geen } 3) &= P(2) + P(4) + P(5) \dots + P(12) \\ &= 1 - P(3) = 1 - \frac{2}{36} = \frac{34}{36} \end{aligned}$$

VOORBEELD 1

Op een extra pupillentraining zijn 3 F-jes, 5 E-tjes en 2 D spelertjes. Voor de eerste oefening kiest de trainer 4 pupillen. Bereken de kans dat :

- Er precies 2 D spelers zitten.
- Minstens 1 F spelers zitten.

OPLOSSING 1

$$\text{a. } P(DD\cancel{D}\cancel{D}) = \frac{\binom{2}{2}\binom{8}{2}}{\binom{10}{4}} = \frac{112}{210}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } P(\text{minstens } 1 F) &= 1 - P(\text{geen } F) = \\ &= 1 - P(\cancel{F}\cancel{F}\cancel{F}\cancel{F}) = 1 - \frac{\binom{3}{0}\binom{7}{4}}{\binom{10}{4}} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

VOORBEELD 2

Bij een loterij zijn 90 loten verkocht. Er is een hoofdprijs van 80 euro en vijf tweede prijzen van 30 euro. Geoffrey heeft voor Michelle 4 loten gekocht.

Bereken de kans dat Michelle :

- a. precies één prijs wint.
- b. minstens één prijs wint.

OPLOSSING 2

a.
$$P(\text{PPPP}) = \frac{\binom{6}{1} \binom{84}{3}}{\binom{90}{4}} = 0,224$$

b.
$$P(\text{minstens één prijs}) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) =$$

$$= 1 - P(0 \text{ prijzen}) = 1 - P(\text{PPPP}) = 1 - \frac{\binom{6}{0} \binom{84}{4}}{\binom{90}{4}} = 0,245$$

LES 2 : COMPLEMENTREGEL BIJ VASTE KANS

DEFINITIE

- P (meer experimenten) = kans op één rijtje \times het aantal verschillende rijtjes
- Als je weet dat A 25% en B 75% kans heeft om een spel te winnen, dan geldt :

$$P(AABBB) = 0,25 \cdot 0,25 \cdot 0,75 \cdot 0,75 \cdot 0,75 \cdot \text{aantal} = 0,25^2 \cdot 0,75^3 \cdot \binom{5}{2}$$

VOORBEELD 1

12% van de meisjes in de bovenbouw rookt. Je vraagt aan 9 meisjes of ze roken. Bereken de kans dat :

- Er precies 3 roken.
- Er precies 2 roken.
- Er hoogstens 8 roken.
- Er minstens 2 roken.

OPLOSSING 1

$$\text{a. } P(R R R N N N N N N) = \binom{9}{3} \cdot 0,12^3 \cdot 0,88^6 = 0,0674$$

$$\text{b. } P(R R N N N N N N N) = \binom{9}{2} \cdot 0,12^2 \cdot 0,88^7 = 0,2119$$

$$\text{c. } P(\text{hoogstens } 8R) = 1 - P(9R) = 1 - 0,12^9 = 1$$

$$\text{d. } P(\text{minstens } 2R) = 1 - P(1R) - P(0R)$$

$$P(1R) = \binom{9}{1} \cdot 0,12^1 \cdot 0,88^8 = 0,3884$$

$$P(2R) = 0,88^9 = 0,3165$$

$$P(\text{minstens } 2R) = 1 - P(1R) - P(0R) = 1 - 0,3884 - 0,3165 = 0,2951$$

PARAGRAAF 3.5 : VOORWAARDELIJKE KANSEN

LES 1 VOORWAARDELIJKE KANSEN

DEFINITIE VOORWAARDELIJKE KANS

- $P(A | B) = \{ \text{Kans op A onder de voorwaarde dat B geldt} \}$
- $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ (Regel van Bayes)

VOORBEELD 1

In de volgende tabel staan de onvoldoendes voor wiskunde op het rapport van 160 leerlingen van de klassen 4, 5 en 6 op een scholengemeenschap.

	klas 4	klas 5	klas 6	totaal
voldoende	45	42	38	125
onvoldoende	5	12	18	35
totaal	50	54	56	160

Bereken de kans dat:

- een willekeurige leerling een onvoldoende heeft.
- een leerling die een voldoende heeft, in de vijfde klas zit.
- een leerling die in klas 6 zit, een onvoldoende heeft.

OPLOSSING 1

- Er is geen voorwaarde. $P(\text{onvoldoende}) = \frac{35}{160}$
- Dit heet een voorwaardelijke kans. De voorwaarde is de leerling heeft een voldoende.
 $A = \{ \text{In de 5}^{\text{e}} \text{ klas} \}$ en $B = \{ \text{Voldoende} \}$

Je kunt dit op twee manieren berekenen :

(1) Beredeneren

Er zijn 125 leerlingen met een voldoende. Daarvan zitten er 42 in de vijfde klas.

$$\text{Dus } P(A | B) = \frac{42}{125}$$

(2) Regel van Bayes

$$P(B) = \frac{125}{160} \text{ en } P(A \cap B) = \frac{42}{160}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{42}{160}}{\frac{125}{160}} = \frac{42}{125}$$

c. De voorwaarde is een voldoende. $A = \{ \text{onvoldoende} \}$ en $B = \{ \text{klas 6} \}$

(1) Beredeneren

Er zijn 56 leerlingen in klas 6. Daarvan hebben 18 een onvoldoende.

$$\text{Dus } P(A | B) = \frac{18}{56}$$

(2) Regel van Bayes

$$P(B) = \frac{56}{160} \text{ en } P(A \cap B) = \frac{18}{160}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{18}{160}}{\frac{56}{160}} = \frac{18}{56}$$

VOORBEELD 2

Wim pakt twee knikker uit een vaas met 5 rode en 3 witte knikkers.

- De eerste is rood (A)
- De tweede is wit (B)

Bereken de kans op $P(B | A)$

OPLOSSING 1

$$P(A) = \frac{5}{8} \text{ en } P(A \cap B) = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{15}{56}}{\frac{5}{8}} = \frac{15}{56} \times \frac{8}{5} = \frac{3}{7}$$