PARAGRAAF 3.1 : HET KANSBEGRIP

LES 1 KANSEN MET DOBBELSTENEN

DEFINITIE

- #   = { Aantal }
- P(..) = { Kans dat ...}
- $P(\ldots) = \frac{\#\,Gunstige\ uitkomsten}{\#\,Totale\ \ uitkomsten} = \frac{\#(G)}{\#(U)}$

VOORBEELD 1

Wim gooit met 2 dobbelstenen. Hij kijkt naar de som.

a. Stel de verzameling U op (= alle mogelijke uitkomsten)

Bereken de kans dat :

b. Het product van de ogen precies 12 is.

c. Het product hoogstens 5 is.

OPLOSSING 1

a. $U = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

b. $P(product = 12) = \frac{4}{36}$

c. $P(product\ hoogstens\ 5) = \frac{10}{36}$

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

LES 2 KANSEN BEREKENEN

DEFINITIE

- In de kansrekening geldt : **EN = × OF = +**
- Hoe bereken je de kans als je een aantal keren achter elkaar een experiment uitvoert ?
  P(...) = kans op één rijtje x het aantal verschillende rijtjes

VOORBEELD 1

Wouter beantwoord 5 ABCD vragen. Hij gokt ze allemaal. Bereken de kans dat :

a. Hij vier keer goed gokt.

b. Hij twee keer goed gokt.

c. Hij hoogstens 1 keer goed gokt..

OPLOSSING 1

a. P(GGGGF) = kans op één rijtje x aantal mogelijke rijtjes

P(GGGGF) = $\binom{5}{4} \times (\frac{1}{4})^4 \times \left(\frac{3}{4}\right) = 0{,}0146$

b. P(GGFFF) = $\binom{5}{2} \times (\frac{1}{4})^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 0{,}2637$

PARAGRAAF 3.3 : HET VAASMODEL

LES 1 : KANSEN

HERHALEN KANSEN BEREKENEN

Hoe bereken je een kans. Dat kan op twee manieren :

(1) $P(\ldots) = \frac{\#\,Gunstige\ uitkomsten}{\#\,Totale\ \ uitkomsten} = \frac{\#(G)}{\#(U)}$ (kans op één experiment)

(2) P(…) = kans op één rijtje x het aantal rijtjes (meerdere experimenten)

VOORBEELD 1

In een vaas zitten 2 blauwe, 5 groene en 8 rode knikkers. Guus pakt 3 knikkers. Bereken de kans dat:

a. Hij 2 groene en een blauwe pakt.

b. Hij 3 verschillende kleuren heeft.

OPLOSSING 1

We zullen bij beide vragen beide oplossingen laten zien :

$$a.\quad (1)\quad P(GGB) = \frac{5}{15}\cdot\frac{4}{14}\cdot\frac{2}{13}\cdot\binom{3}{2} = 0,044$$

$$(2)\quad P(GGB) = \frac{\binom{5}{2}\binom{2}{1}\binom{8}{0}}{\binom{15}{3}} = \frac{10\cdot 2\cdot 1}{455} = 0,044$$

$$b.\quad (1)\quad P(RGB) = \frac{8}{15}\cdot\frac{5}{14}\cdot\frac{2}{13}\cdot\binom{6}{1} = 0,176$$

$$(2)\quad P(RGB) = \frac{\binom{5}{1}\binom{2}{1}\binom{8}{1}}{\binom{15}{3}} = 0,176$$

VOORBEELD 2

Op een training zijn er 4 paarse, 3 witte en 8 rode hesjes. De trainer pakt uit de stapel 3 hesjes

Bereken de kans dat:

a. hij 2 of 3 rode pakt.

b. hij minder dan 3 witte pakt.

OPLOSSING 2

a. $P(RR\cancel{R}) \text{ of } P(RRR) = \dfrac{\binom{8}{2}\binom{7}{1}}{\binom{15}{3}} + \dfrac{\binom{8}{3}\binom{7}{0}}{\binom{15}{3}} = 0{,}554$

b. $P(\cancel{WWW}) \text{ of } P(W\cancel{WW}) \text{ of } P(WW\cancel{W}) = \dfrac{\binom{3}{0}\binom{12}{3}}{\binom{15}{3}} + \dfrac{\binom{3}{1}\binom{12}{2}}{\binom{15}{3}} + \dfrac{\binom{3}{2}\binom{12}{1}}{\binom{15}{3}} = 0{,}998$

VOORBEELD 3

Wim gooit met twee gewone dobbelstenen en één viervlaksdobbelsteen. Bereken de kans dat :

a. Ze als som 15 gooien.

b. Er precies één 5 gegooid wordt.

c. Met elke dobbelsteen minimaal 4 ogen gegooid wordt.

Hans gooit met één dobbelsteen. Hij stopt als hij zes gooit.

d. Bereken de kans dat hij vijf keer moet gooien.

OPLOSSING 3

Het laatste getal is hier de viervlaksdobbelsteen !!

a. Som = 15 → 663 of 654 of 564

$$P(663)+P(654)+P(564)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}$$

$$P(663)+P(654)+P(564)=\frac{1}{144}+\frac{1}{144}+\frac{1}{144}=\frac{3}{144}$$

b. Eén 5 → 5 ~~5~~ ~~5~~ of ~~5~~ 5 ~~5~~ (~~55~~5 kan niet want het is een viervlaks !!)

$$P(5\,\cancel{5}\,\cancel{5})+P(\cancel{5}\,5\,\cancel{5})=\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{4}{4}+\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{4}{4}$$

$$P(5\,\cancel{5}\,\cancel{5})+P(\cancel{5}\,5\,\cancel{5})=\frac{20}{144}+\frac{20}{144}=\frac{40}{144}\left(=\frac{5}{18}\right)$$

c. Noem 4 of hoger even H (Hoog) en

Met elke dobbelsteen H → HHH

$$P(HHH)=\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}\times\frac{1}{4}=\frac{9}{144}\left(=\frac{1}{16}\right)$$

d. $P(\cancel{6}\,\cancel{6}\,\cancel{6}\,\cancel{6}\;6)=\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\left(\frac{5}{6}\right)^4\times\frac{1}{6}=\frac{625}{7776}\approx 0{,}0804$

PARAGRAAF 3.4 : DE COMPLEMENTREGEL

LES 1 : COMPLEMENTREGEL

DEFINITIE COMPLEMENTREGEL

- De complementregel gebruik je als de kans die je NIET wil berekenen veel makkelijker / korter is dan de kans die je wel wil berekenen.
- P (A) + P(niet A) = 1

  P (A) = 1 - P(niet A)

VOORBEELDEN

Je gooit met twee dobbelstenen. Je kijkt naar de som.

(1) P (minstens 3) = P(3) + P(4) + P(5) … + P(12)

$= 1 - P(2) = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$

(2) P (geen 3) = P(2) + P(4) + P(5) … + P(12)

$= 1 - P(3) = 1 - \frac{2}{36} = \frac{34}{36}$

VOORBEELD 1

Op een extra pupillentraining zijn 3 F-jes, 5 E-tjes en 2 D spelertjes. Voor de eerste oefening kiest de trainer 4 pupillen. Bereken de kans dat :

a. Er precies 2 D spelers zitten.

b. Minstens 1 F spelers zitten.

OPLOSSING 1

a. $P(DD\cancel{DD}) = \frac{\binom{2}{2}\binom{8}{2}}{\binom{10}{4}} = \frac{112}{210}$

b. $P(minstens\ 1\ F) = 1 - P(geen\ F) =$

$$= 1 - P(\cancel{FFFF}) = 1 - \frac{\binom{3}{0}\binom{7}{4}}{\binom{10}{4}} = \frac{5}{6}$$

VOORBEELD 2

Bij een loterij zijn 90 loten verkocht. Er is een hoofdprijs van 80 euro en vijf tweede prijzen van 30 euro. Geoffrey heeft voor Michelle 4 loten gekocht.

Bereken de kans dat Michelle :

a. precies één prijs wint.

b. minstens één prijs wint.

OPLOSSING 2

a. $$P(P\cancel{PPP}) = \frac{\binom{6}{1}\binom{84}{3}}{\binom{90}{4}} = 0{,}224$$

b. P(minstens één prijs) $= P(1) + P(2) + P(3) + P(4) =$

$$= 1 - P(0 \text{ prijzen}) = 1 - P(\cancel{PPPP}) = 1 - \frac{\binom{6}{0}\binom{84}{4}}{\binom{90}{4}} = 0{,}245$$

LES 2 : COMPLEMENTREGEL BIJ VASTE KANS

DEFINITIE

- P(meer experimenten) = kans op één rijtje x het aantal verschillende rijtjes
- Als je weet dat A 25% en B 75% kans heeft om een spel te winnen, dan geldt :

$$P(AABBB) = 0{,}25 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}75 \cdot aantal = 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^3 \cdot \binom{5}{2}$$

VOORBEELD 1

12% van de meisjes in de bovenbouw rookt. Je vraagt aan 9 meisjes of ze roken. Bereken de kans dat :

a. Er precies 3 roken.

b. Er precies 2 roken.

c. Er hoogstens 8 roken.

d. Er minstens 2 roken.

OPLOSSING 1

a. P(R R R N N N N N N) = $\binom{9}{3} \cdot 0{,}12^3 \cdot 0{,}88^6 = 0{,}0674$

b. P(R R N N N N N N N) = $\binom{9}{2} \cdot 0{,}12^2 \cdot 0{,}88^7 = 0{,}2119$

c. P(hoogstens 8R) = 1 – P(9R) = $1 - 0{,}12^9 = 1$

d. P(minstens 2R) = 1 – P(1R) – P(0R)

P(1R) = $\binom{9}{1} \cdot 0{,}12^1 \cdot 0{,}88^8 = 0{,}3884$

P(2R) = $0{,}88^9 = 0{,}3165$

P(minstens 2R) = 1 – P(1R) – P(0R) = 1 – 0,3884 – 0,3165 = 0,2951

PARAGRAAF 3.5 : VOORWAARDELIJKE KANSEN

LES 1 VOORWAARDELIJKE KANSEN

DEFINITIE VOORWAARDELIJKE KANS

- $P(A \mid B)$ $=$ { Kans op A onder de voorwaarde dat B geldt }
- $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ (Regel van Bayes)

VOORBEELD 1

In de volgende tabel staan de onvoldoendes voor wiskunde op het rapport van 160 leerlingen van de klassen 4, 5 en 6 op een scholengemeenschap.

	klas 4	klas 5	klas 6	totaal
voldoende	45	42	38	125
onvoldoende	5	12	18	35
totaal	50	54	56	160

Bereken de kans dat:

a. een willekeurige leerling een onvoldoende heeft.

b. een leerling die een voldoende heeft, in de vijfde klas zit.

c. een leerling die in klas 6 zit, een onvoldoende heeft.

OPLOSSING 1

a. Er is geen voorwaarde. P(onvoldoende) = $\frac{35}{160}$

b. Dit heet een voorwaardelijke kans. De voorwaarde is de leerling heeft een voldoende.
A = { In de 5^{e} klas } en B = { Voldoende }

Je kunt dit op twee manieren berekenen :

(1) Beredeneren

Er zijn 125 leerlingen met een voldoende. Daarvan zitten er 42 in de vijfde klas.

Dus $P(A \mid B) = \frac{42}{125}$

(2) Regel van Bayes

$P(B) = \frac{125}{160}$ en $P(A \cap B) = \frac{42}{160}$

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{42}{160}}{\frac{125}{160}} = \frac{42}{125}$

c. De voorwaarde is een voldoende. A = { onvoldoende } en B = { klas 6 }

(1) Beredeneren

Er zijn 56 leerlingen in klas 6. Daarvan hebben 18 een onvoldoende.

Dus $P(A \mid B) = \frac{18}{56}$

(2) Regel van Bayes

$P(B) = \frac{56}{160}$ en $P(A \cap B) = \frac{18}{160}$

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{18}{160}}{\frac{56}{160}} = \frac{18}{56}$

VOORBEELD 2

Wim pakt twee knikker uit een vaas met 5 rode en 3 witte knikkers.

- De eerste is rood (A)
- De tweede is wit (B)

Bereken de kans op $P(B \mid A)$

OPLOSSING 1

$P(A) = \frac{5}{8}$ en $P(A \cap B) = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$

$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{15}{56}}{\frac{5}{8}} = \frac{15}{56} \times \frac{8}{5} = \frac{3}{7}$