PARAGRAAF K.1 : SUBSTITUTIEMETHODE

Als de integralen moeilijker worden, heb je een aantal hulpregels nodig :

(1) Substitutiemethode (K.1) → Soort omgekeerde kettingregel

(2) Partieel Integreren (K.2) → Soort productregel

(3) Arcsin(x) – arccos(x) – arctan(x) (K.3) → De inverse van sin(x) – cos(x) – tan(x)

(4) Breuksplitsen (K.4) → Breuken uit elkaar halen

We beginnen in deze paragraaf met de substitutiemethode.

STAPPENPLAN VOOR DE SUBSTITUTIEMETHODE :

(1) Neem y = formule (bij kettingregel noem je deze formule meestal u)

(2) $\frac{dy}{dx} = y'$ omschrijven tot y'dx = dy

(3) Vul in de integraal de y en dy in en integreer deze formule.

VOORBEELD 1

Bepaal de primitieve van

a. $\int 2x(x^2+3)^5\,dx =$

b. $\int \frac{9x^2}{\sqrt{x^3-5}}\,dx =$

c. $\int \cos^2(x)\sin(x)dx =$

OPLOSSING 1

a. Substitutiemethode toepassen :

(1) y = $x^2 + 3$

(2) $\frac{dy}{dx} = 2x$ dus dy = 2x dx

(3) $\int 2x(x^2+3)^5\,dx = \int (x^2+3)^5 \cdot 2xdx = \int (y)^5\,dy = \left[\frac{1}{6}y^6\right] = \left[\frac{1}{6}(x^2+3)^6\right] =$

b. Substitutiemethode toepassen :

(1) y = $x^3 - 5$

(2) $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ dus

dy = $3x^2$ dx

3 dy = $9x^2$ dx

(3) $\int \frac{9x^2}{\sqrt{x^3-5}}\,dx = \int \frac{3}{\sqrt{y}}\,dy = [3 \cdot 2 \cdot \sqrt{y}] = [6\sqrt{y}] = [6\sqrt{x^3-5}]$

c. Substitutiemethode toepassen :

(1) y = cos(x)

(2) $\frac{dy}{dx} = -\sin(x)$

$dy = -sin(x)\,dx$

$-1 \cdot dy = sin(x)\,dx$

(3) $\int cos^2(x)\sin(x)\,dx = \int y^2 \cdot -1 \cdot dy = \left[-\frac{1}{3}y^3\right] = \left[-\frac{1}{3}cos^3(x)\right]$

PARAGRAAF K.2 : PARTIEEL INTEGREREN

STAPPENPLAN VOOR PARTIEEL INTEGREREN :

(1) Noem de ene formule f’ (deze wil je integreren) en de andere g (deze wil je differentiëren)

(2) Vul deze in bij $\int f' \cdot g dx = [f \cdot g] - \int f \cdot g' dx$

(3) Probeer de laatste te integreren en als dat niet lukt herhaal dan stap 1 en 2 voor de laatste integraal.

VOORBEELD 1

Bepaal de primitieve van

a. $\int x \ln(x) dx =$

b. $\int 3x \cdot e^x dx =$

c. $\int \cos(x) \cdot e^x dx =$

OPLOSSING 1

a. Partieel Integreren toepassen. Je wil ln(x) graag <u>differentiëren</u> !!! (want integreren is een moeilijkere functie). Dus $g = ln(x)$ en $f' = x$. Dit geeft :

$g = \ln(x) \quad \rightarrow g' = \frac{1}{x}$

$f' = x. \quad \rightarrow f = \frac{1}{2}x^2$

Invullen geeft :

$$\int x \ln(x) dx = \left[\tfrac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x)\right] - \int \tfrac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= \left[\tfrac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x)\right] - \int \tfrac{1}{2} x dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x)\right] - \left[\tfrac{1}{4}x^2\right] = \left[\tfrac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) - \tfrac{1}{4}x^2\right]$$

b. Je wil 3x graag differentiëren dus $g = 3x$ en $f' = e^{2x}$. Dit geeft :

$g = 3x \qquad \rightarrow g' = 3$

$f' = e^{2x}$. $\qquad \rightarrow f = \frac{1}{2}e^{2x}$

Invullen geeft :

$$\int 3x \cdot e^{2x} dx \qquad = \left[3x \cdot \tfrac{1}{2}e^{2x}\right] - \int 3 \cdot \tfrac{1}{2}e^{2x} dx$$

$$= \left[\tfrac{3}{2}xe^{2x}\right] - \left[\tfrac{3}{4}e^{2x}\right] = \left[\tfrac{3}{2}xe^{2x} - \tfrac{3}{4}e^{2x}\right]$$

c. Partieel Integreren toepassen. Er is nu geen echte voorkeur. We kiezen daarom (willekeurig) $g = cos(x)$ en $f' = e^x$. Dit geeft

$g = \cos(x) \qquad \rightarrow g' = -\sin(x)$

$f' = e^x \qquad \rightarrow f = e^x$

Invullen geeft :

(1) $$\int \cos(x) \cdot e^x dx = \left[\cos(x) \cdot e^x\right] - \int -\sin(x)e^x dx$$

$$= \left[\cos(x) \cdot e^x\right] + \int \sin(x)e^x dx$$

Je bent niks opgeschoten (lijkt het). Je gaat het laatste deel $\int \sin(x)e^x dx$ nu nog een keer Partieel Integreren met $g = \sin(x) \Rightarrow g' = cos(x)$ en $f' = e^x \Rightarrow f = e^x$.

Dit geeft :

(2) $$\int \sin(x) \cdot e^x dx = \left[\sin(x) \cdot e^x\right] - \int \cos(x)e^x dx$$

Vul de uitkomst van **(2)** in bij de integraal van **(1)**. Je krijgt dan

$$\int \cos(x) \cdot e^x dx = \left[\cos(x) \cdot e^x\right] + \int \sin(x)e^x dx = \left[\cos(x) \cdot e^x\right] + \left[\sin(x) \cdot e^x\right] - \int \cos(x)e^x dx$$

Je hebt nu links en rechts dezelfde integraal. Stel $Q = \int \cos(x) \cdot e^x dx$. Je krijgt dan :

$$Q = \left[\cos(x) \cdot e^x\right] + \left[\sin(x) \cdot e^x\right] - Q$$

$$2Q = \left[\cos(x) \cdot e^x + \sin(x) \cdot e^x\right]$$

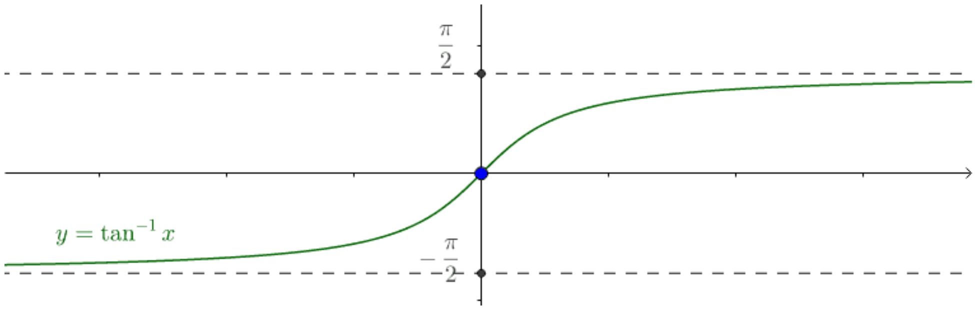
$$Q = \left[\tfrac{1}{2}\cos(x) \cdot e^x + \tfrac{1}{2}\sin(x) \cdot e^x\right]$$

PARAGRAAF K.3 : CYCLOMETRISCHE FUNCTIES

LES 1 : WAT IS ARCTAN(X), ARCSIN(X) EN ARCCOS(X)

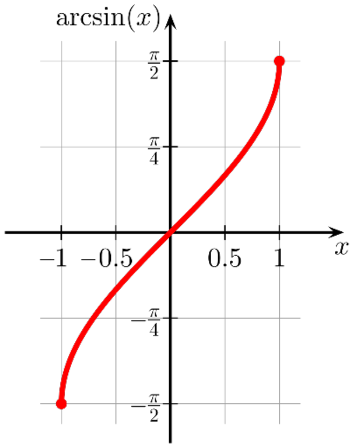
Eerst een aantal definities :

(1) $arctan\ (x)\ =\ tan^{-1}(x)$ (de inverse van $tan(x)$)



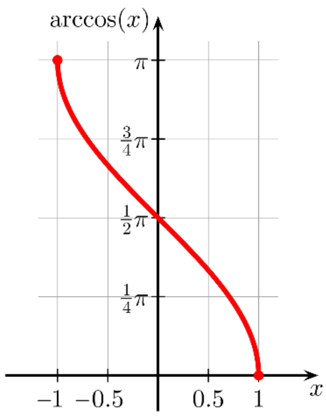
Domein = $\mathbb{R}$

(2) $arcsin\ (x)\ =\ sin^{-1}(x)$



Domein = $[-1,1]$ en Bereik = $[\,-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi\,]$

(3) $arccos\ (x)\ =\ cos^{-1}(x)$



Domein = $[-1,1]$ en Bereik = $[\,0, \pi\,]$

VOORBEELD 1

Bereken

a. $x = arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

b. $x = arctan(-1)$

c. $arccos(2x+3) = \frac{1}{3}\pi$

OPLOSSING 1

a. $x = arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

$sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$x = \frac{1}{6}\pi \;\; v \;\; x = \frac{5}{6}\pi \; (V.N. op\ domein)$

b. $x = arctan(-1)$

$tan(x) = -1$

$x = -\frac{1}{4}\pi$

c. $arccos(2x+3) = \frac{1}{3}\pi$

$cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = 2x+3$

$\frac{1}{2} = 2x+3$

$2x = -2\frac{1}{2}$

$x = -1\frac{1}{4}$

LES 2 : DIFFERENTIËREN VAN ARCTAN(X), ARCSIN(X) EN ARCCOS(X)

Differentiëren van cyclometrische functies

(1) $f(x) = arctan(x)$ $\rightarrow f'(x) = \frac{1}{x^2+1}$

(2) $f(x) = arcsin(x)$ $\rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(3) $f(x) = arccos(x)$ $\rightarrow f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

VOORBEELD 1

Bepaal de primitieve van

a. $\int \frac{1}{9x^2+1}dx =$

b. $\int \frac{5}{x^2+8x+17}dx =$

OPLOSSING 1

a. $\int \frac{1}{9x^2+1}dx = \int \frac{1}{(3x)^2+1}dx = \left[\frac{1}{3}\arctan(3x)\right]$

b. $\int \frac{5}{x^2+8x+17}dx = \int 5 \cdot \frac{1}{(x+4)^2+1}dx = \left[5\arctan(x+4)\right]$

PARAGRAAF K.4 : BREUKSPLITSEN

De functie $f(x)=\frac{px+q}{ax^2+bx+c}$ kun je op een aantal manieren integreren. Dit hangt af van de waarde van de discriminant $D=b^2-4ac$. Er geldt :

(1) Als D < 0 → Iets met arctan(x)

(2) Als D = 0 → Substitutiemethode (Iets met $\ln(ax^2+bx+c)$)

(3) Als D > 0 → Breuksplitsen : $\frac{px+q}{ax^2+bx+c}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}$

VOORBEELD 1

Bepaal de primitieve van $\int\frac{3x+5}{x^2+x-2}dx$

OPLOSSING 1

(1) Omdat D > 0 en omdat $x^2+x-2=(x+2)(x-1)$ kun je deze integraal schrijven als :

$$\frac{3x+5}{x^2+x-2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}$$

(2) Nu gaan we de laatste vorm als één breuk schrijven. Dit geeft

$$\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}=\frac{A(x-1)}{(x+2)(x-1)}+\frac{B(x+2)}{(x-1)(x+2)}=\frac{Ax+Bx-A+2B}{x^2+x-2}$$

(3) Deze laatste vorm moet gelijk zijn aan $\frac{3x+5}{x^2+x-2}$. Je krijgt dan een stelsel dat je kunt oplossen :

$$\begin{cases} A+B=\ 3 \\ -A+2B=5+ \end{cases}$$

$3B\ =\ 8\rightarrow\ B\ =\ \frac{8}{3}$. Dus $A=3-\frac{8}{3}=\frac{1}{3}$

(4) Nu kunnen we de integraal bepalen :

$$\int\frac{3x+5}{x^2+x-2}dx=\int\frac{\frac{1}{3}}{x+2}+\frac{\frac{8}{3}}{x-1}dx=\frac{1}{3}\ln|x+2|+\frac{8}{3}\ln|x-1|$$

VOORBEELD 2 (DOOR ELKAAR)

Bepaal de primitieve van

a. $\int \frac{x+1}{x^2-4x+4} dx$

b. $\int \frac{8}{x^2-2x-15} dx$

OPLOSSING 2

a. Eerst naar de D berekenen : $D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16 - 16 = 0$

(i) Omdat D = 0 moeten we de substitutiemethode gebruiken :

1) $y = x^2 - 4x + 4$

2) $dy = (2x - 4)dx$ dus $\frac{1}{2}dy = (x - 2)dx$

(ii) De ln-vorm eruit halen geeft :

$$\int \frac{x+1}{x^2-4x+4} dx = \int \frac{x-2+3}{x^2-4x+4} dx = \int \frac{x-2}{x^2-4x+4} dx + \int \frac{3}{x^2-4x+4} dx =$$

$$\int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y} dy + \int \frac{3}{(x-2)^2} dx = \left[\frac{1}{2} \cdot \ln(y)\right] + \left[-3(x-2)^{-1)}\right] = \left[\frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 - 4x + 4) + \frac{3}{x-2}\right]$$

b. Omdat D > 0 en omdat $x^2 - 2x - 15 = (x + 3)(x - 5)$ kun je deze integraal schrijven als :

$$\frac{8}{x^2 - 2x - 15} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-5}$$

Nu gaan we de laatste vorm als één breuk schrijven. Dit geeft

$$\frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-5} = \frac{A(x-5)}{(x+3)(x-5)} + \frac{B(x+3)}{(x-5)(x+3)} = \frac{Ax + Bx - 5A + 3B}{x^2 - 2x - 15}$$

Deze laatste vorm moet gelijk zijn aan $\frac{8}{x^2-2x-15}$.

Dit betekent dat $A + B = 0$ en $-5A + 3B = 8$

Omdat $A = -B$ krijg je $-5B - 3B = 8$

Dit geeft $B = -1$. Dus $A = 1$

Nu kunnen we de integraal bepalen :

$$\int \frac{8}{x^2 - 2x - 15} dx = \int \frac{1}{x+3} + \frac{-1}{x-5} dx = [\ln(x+3) - \ln(x-5)]$$