

PARAGRAAF K.1 : SUBSTITUTIE METHODE

Als de integralen moeilijker worden, heb je een aantal hulpregels nodig :

- (1) Substitutiemethode (K.1) → Soort omgekeerde kettingregel
- (2) Partieel Integreeren (K.2) → Soort productregel
- (3) Arcsin(x) – arccos(x) – arctan(x) (K.3) → De inverse van sin(x) – cos(x) – tan(x)
- (4) Breuksplitsen (K.4) → Breuken uit elkaar halen

We beginnen in deze paragraaf met de substitutiemethode.

STAPPENPLAN VOOR DE SUBSTITUTIE METHODE :

- (1) Neem $y =$ formule (bij kettingregel noem je deze formule meestal u)
- (2) $\frac{dy}{dx} = y'$ omschrijven tot $y' dx = dy$
- (3) Vul in de integraal de y en dy in en integreer deze formule.

VOORBEELD 1

Bepaal de primitieve van

a. $\int 2x(x^2 + 3)^5 dx =$

b. $\int \frac{9x^2}{\sqrt{x^3 - 5}} dx =$

c. $\int \cos^2(x) \sin(x) dx =$

OPLOSSING 1

a. Substitutiemethode toepassen :

$$(1) y = x^2 + 3$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = 2x \text{ dus } dy = 2x \, dx$$

$$(3) \int 2x(x^2 + 3)^5 \, dx = \int (x^2 + 3)^5 \cdot 2x \, dx = \int (y)^5 \, dy = \left[\frac{1}{6} y^6 \right] = \left[\frac{1}{6} (x^2 + 3)^6 \right] =$$

b. Substitutiemethode toepassen :

$$(1) y = x^3 - 5$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = 3x^2 \text{ dus } dy = 3x^2 \, dx \text{ dus } 3 \, dy = 9x^2$$

$$(3) \int \frac{9x^2}{\sqrt{x^3 - 5}} \, dx = \int \frac{3}{\sqrt{y}} \, dy = [3 \cdot 2 \cdot \sqrt{y}] = [6\sqrt{y}] = [6\sqrt{x^3 - 5}]$$

c. Substitutiemethode toepassen :

$$1. y = \cos(x)$$

$$2. \frac{dy}{dx} = -\sin(x) \text{ dus } dy = -\sin(x) \, dx$$

$$3. \int \cos^2(x) \sin(x) \, dx = \int -\cos^2(x) \cdot -\sin(x) \, dx = \int -y^2 \, dy = \left[\frac{1}{3} y^3 \right] = \left[\frac{1}{3} \cos^3(x) \right] =$$

PARAGRAAF K.2 : PARTIEEL INTEGREREN

STAPPENPLAN VOOR PARTIEEL INTEGREREN :

- (1) Noem de ene formule f' (deze wil je integreren) en de andere g (deze wil je differentiëren)
 (2) Vul deze in bij $\int f' \cdot g dx = [f \cdot g] - \int f \cdot g' dx$
 (3) Probeer de laatste te integreren en als dat niet lukt herhaal dan stap 1 en 2 voor de laatste integraal.

VOORBEELD 1

Bepaal de primitieve van

a. $\int x \ln(x) dx =$

b. $\int 3x \cdot e^x dx =$

c. $\int \cos(x) \cdot e^x dx =$

OPLOSSING 1

- a. Partieel Integreren toepassen. Je wil $\ln(x)$ graag differentiëren !!! (want integreren is een moeilijkere functie). Dus $g = \ln(x)$ en $f' = x$. Dit geeft :

$$\begin{aligned} g = \ln(x) & \quad \rightarrow g' = \frac{1}{x} \\ f' = x & \quad \rightarrow f = \frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

Invullen geeft :

$$\begin{aligned} \int x \ln(x) dx &= \left[\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) \right] - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) \right] - \int \frac{1}{2}x dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) \right] - \left[\frac{1}{4}x^2 \right] = \left[\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) - \frac{1}{4}x^2 \right] \end{aligned}$$

b. Je wil $3x$ graag differentiëren dus $g = 3x$ en $f' = e^{2x}$. Dit geeft :

$$\begin{aligned} g = 3x & \rightarrow g' = 3 \\ f' = e^{2x} & \rightarrow f = \frac{1}{2}e^{2x} \end{aligned}$$

Invullen geeft :

$$\begin{aligned} \int 3x \cdot e^{2x} dx &= \left[3x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} \right] - \int 3 \cdot \frac{1}{2} e^{2x} dx \\ &= \left[\frac{3}{2} x e^{2x} \right] - \left[\frac{3}{4} e^{2x} \right] = \left[\frac{3}{2} x e^{2x} - \frac{3}{4} e^{2x} \right] \end{aligned}$$

c. Partieel Integreren toepassen. Er is nu geen echte voorkeur. We kiezen daarom

(willekeurig) $g = \cos(x)$ en $f' = e^x$. Dit geeft

$$\begin{aligned} g = \cos(x) & \rightarrow g' = -\sin(x) \\ f' = e^x & \rightarrow f = e^x \end{aligned}$$

Invullen geeft :

$$\begin{aligned} \text{(1)} \int \cos(x) \cdot e^x dx &= \left[\cos(x) \cdot e^x \right] - \int -\sin(x) e^x dx \\ &= \left[\cos(x) \cdot e^x \right] + \int \sin(x) e^x dx \end{aligned}$$

Je bent niks opgeschoten (lijkt het). Je gaat het laatste deel $\int \sin(x) e^x dx$ nu nog een keer

Partieel Integreren met $g = \sin(x) \Leftrightarrow g' = \cos(x)$ en $f' = e^x \Leftrightarrow f = e^x$.

Dit geeft :

$$\text{(2)} \int \sin(x) \cdot e^x dx = \left[\sin(x) \cdot e^x \right] - \int \cos(x) e^x dx$$

Vul de uitkomst van **(2)** in bij de integraal van **(1)**. Je krijgt dan

$$\int \cos(x) \cdot e^x dx = \left[\cos(x) \cdot e^x \right] + \int \sin(x) e^x dx = \left[\cos(x) \cdot e^x \right] + \left[\sin(x) \cdot e^x \right] - \int \cos(x) e^x dx$$

Je hebt nu links en rechts dezelfde integraal. Stel $Q = \int \cos(x) \cdot e^x dx$. Je krijgt dan :

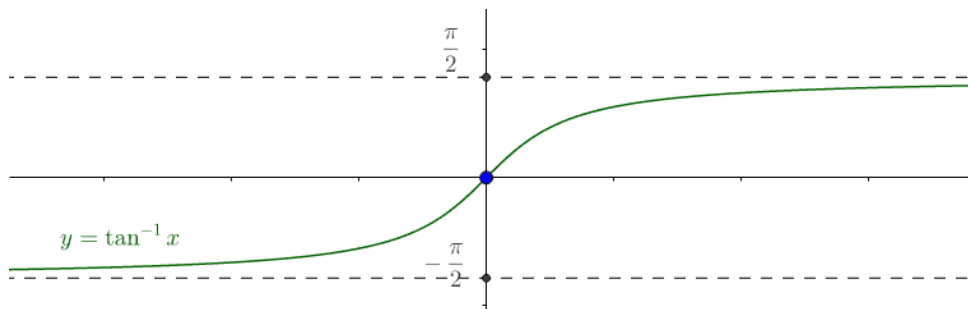
$$\begin{aligned} Q &= \left[\cos(x) \cdot e^x \right] + \left[\sin(x) \cdot e^x \right] - Q \\ 2Q &= \left[\cos(x) \cdot e^x + \sin(x) \cdot e^x \right] \\ Q &= \left[\frac{1}{2} \cos(x) \cdot e^x + \frac{1}{2} \sin(x) \cdot e^x \right] \end{aligned}$$

PARAGRAAF K.3 : CYCLOMETRISCHE FUNCTIES

LES 1 : WAT IS ARCTAN(X), ARCSIN(X) EN ARCCOS(X)

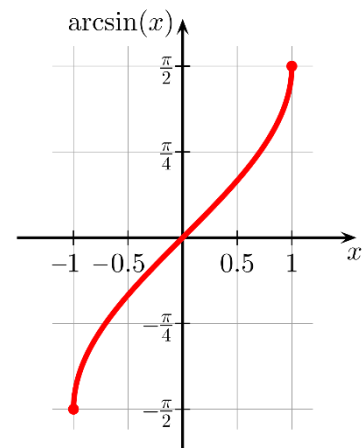
Eerst een aantal definities :

(1) $arctan(x) = \tan^{-1}(x)$ (de inverse van $\tan(x)$)



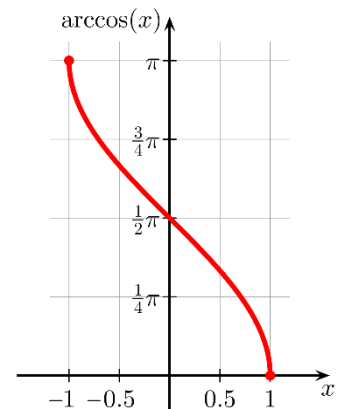
Domein = \mathbb{R} (alles) en Bereik = $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$

(2) $arcsin(x) = \sin^{-1}(x)$



Domein = $[-1,1]$ en Bereik = $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$

(3) $arccos(x) = \cos^{-1}(x)$



Domein = $[-1,1]$ en Bereik = $[0, \pi]$

VOORBEELD 1

Bereken

a. $x = \arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

b. $x = \arctan(-1)$

c. $\arccos(2x + 3) = \frac{1}{3}\pi$

OPLOSSING 1

a. $x = \arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

$$\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi \text{ (V.N. op domein)}$$

b. $x = \arctan(-1)$

$$\tan(x) = -1$$

$$x = -\frac{1}{4}\pi$$

c. $\arccos(2x + 3) = \frac{1}{3}\pi$

$$\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = 2x + 3$$

$$\frac{1}{2} = 2x + 3$$

$$2x = -2\frac{1}{2}$$

$$x = -1\frac{1}{4}$$

LES 2 : DIFFERENTIËREN VAN ARCTAN(X), ARCSIN(X) EN ARCCOS(X)

Differentiëren van cyclometrische functies

$$\begin{aligned} \text{(1)} \quad f(x) &= \arctan(x) && \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x^2+1} \\ \text{(2)} \quad f(x) &= \arcsin(x) && \rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \text{(3)} \quad f(x) &= \arccos(x) && \rightarrow f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

VOORBEELD 1

Bepaal de primitieve van

a. $\int \frac{1}{9x^2 + 1} dx =$

b. $\int \frac{5}{x^2 + 8x + 17} dx =$

OPLOSSING 1

a. $\int \frac{1}{9x^2 + 1} dx = \int \frac{1}{(3x)^2 + 1} dx = \left[\frac{1}{3} \arctan(3x) \right]$

b. $\int \frac{5}{x^2 + 8x + 17} dx = \int 5 \cdot \frac{1}{(x+4)^2 + 1} dx = [5 \arctan(x+4)]$

PARAGRAAF K.4 : BREUKSPLITSEN

De functie $f(x) = \frac{px+q}{ax^2+bx+c}$ kun je op een aantal manieren integreren. Dit hangt af van de waarde van de discriminant $D = b^2 - 4ac$. Er geldt :

- (1) Als $D < 0$ → iets met $\arctan(x)$
 (2) Als $D = 0$ → Substitutiemethode (iets met $\ln(ax^2 + bx + c)$)
 (3) Als $D > 0$ → Breuksplitsen : $\frac{px+q}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$

VOORBEELD 1

Bepaal de primitieve van $\int \frac{3x+5}{x^2+x-2} dx$

OPLOSSING 1

(1) Omdat $D > 0$ en omdat $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$ kun je deze integraal schrijven als :

$$\frac{3x+5}{x^2+x-2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}$$

(2) Nu gaan we de laatste vorm als één breuk schrijven. Dit geeft

$$\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)}{(x+2)(x-1)} + \frac{B(x+2)}{(x-1)(x+2)} = \frac{Ax+Bx-A+2B}{x^2+x-2}$$

(3) Deze laatste vorm moet gelijk zijn aan $\frac{3x+5}{x^2+x-2}$. Je krijgt dan een stelsel dat je kunt oplossen :

$$\begin{cases} A+B=3 \\ -A+2B=5 \end{cases}$$

$$3B = 8 \rightarrow B = \frac{8}{3}. \quad \text{Dus} \quad A = 3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$$

(4) Nu kunnen we de integraal bepalen :

$$\int \frac{3x+5}{x^2+x-2} dx = \int \frac{\frac{1}{3}}{x+2} + \frac{\frac{8}{3}}{x-1} dx = \frac{1}{3} \ln(x+2) + \frac{8}{3} \ln(x-1)$$

VOORBEELD 2 (DOOR ELKAAR)

Bepaal de primitieve van

a. $\int \frac{x+1}{x^2-4x+4} dx$

b. $\int \frac{8}{x^2-2x-15} dx$

OPLOSSING 2

a. Eerst naar de D berekenen : $D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16 - 16 = 0$

(i) Omdat $D = 0$ moeten we de substitutiemethode gebruiken :

1) $y = x^2 - 4x + 4$

2) $dy = (2x - 4)dx$ dus $\frac{1}{2}dy = (x - 2)dx$

(ii) De ln-vorm eruit halen geeft :

$$\int \frac{x+1}{x^2-4x+4} dx = \int \frac{x-2+3}{x^2-4x+4} dx = \int \frac{x-2}{x^2-4x+4} dx + \int \frac{3}{x^2-4x+4} dx =$$

$$\int \frac{1}{y} dy + \int \frac{3}{(x-2)^2} dx = [\ln(y) + 3(x-2)^{-1}] = \left[\ln(x^2 - 4x + 4) + \frac{3}{x-2} \right]$$

b. Omdat $D > 0$ en omdat $x^2 - 2x - 15 = (x+3)(x-5)$ kun je deze integraal schrijven als :

$$\frac{8}{x^2 - 2x - 15} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-5}$$

Nu gaan we de laatste vorm als één breuk schrijven. Dit geeft

$$\frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-5} = \frac{A(x-5)}{(x+3)(x-5)} + \frac{B(x+3)}{(x-5)(x+3)} = \frac{Ax + Bx - 5A + 3B}{x^2 - 2x - 15}$$

Deze laatste vorm moet gelijk zijn aan $\frac{8}{x^2-2x-15}$.

Dit betekent dat $A + B = 0$ en $-5A + 3B = 8$

Omdat $A = -B$ krijg je $-5B - 3B = 8$

Dit geeft $B = -1$. Dus $A = 1$

Nu kunnen we de integraal bepalen :

$$\int \frac{8}{x^2 - 2x - 15} dx = \int \frac{1}{x+3} + \frac{-1}{x-5} dx = [\ln(x+3) - \ln(x-5)]$$