PARAGRAAF 8.1 : REKENEN MET COMPLEXE GETALLEN

LES 1 VERZAMELINGEN EN KWADRAAT AFSPLITSEN

DEFINITIES VERZAMELINGEN

Er zijn verschillende verzamelingen getallen :

(1) N = Natuurlijke getallen = 1,2,3,…..
(2) Z = Gehele getallen = … ,-3,-2,-1,0,1,2,3,…..
(3) Q = Rationale getallen (breuken) = Z en ½, -1 ¾ , etc…
(4) R = Reële getallen = Q en √7,π, -∛328 , etc
(5) C = Complexe getallen = R en alles van de vorm a+bi

THEORIE COMPLEXE GETALLEN

(1) Complexe getallen zijn getallen van de vorm $z = a + bi$ met $i^2 = -1$.

(2) Voorbeelden zijn $3 + 4i$, $10 - 2i$, maar ook -$3i$ $(= 0 - 3i)$ of 4 $(= 4 + 0i)$

STAPPENPLAN KWADRAAT AFSPLITSEN

(i) Schrijf $(x + \frac{1}{2}b)^2$ uit.

(ii) Vul dit in de opgave in en los de vergelijking op.

VOORBEELD 1

Los de vergelijking $x^2 + 8x - 20 = 0$ op met kwadraat afsplitsen.

OPLOSSING 1

(i) $(x+4)^2 \ = \ x^2 + 8x + 16$

(ii) Vul in en los de vergelijking op.

$x^2 + 8x - 20 = 0$

$x^2 + 8x + 16 - 36 = 0$

$(x+4)^2 - 36 \ = \ 0$

$(x+4)^2 \ = \ 36$

$x + 4 \ = \ 6 \ \ v \ \ x + 4 \ = \ -6$

$x \ = \ 2 \ \ v \ \ x \ = \ -10$

VOORBEELD 2

Los de vergelijkingen op. Maak gebruik van $i^2 = -1$

a. $x^2 + 4x + 9 = 0$

b. $x^2 - 5x - 16¼ = 0$

OPLOSSING 2

a. Eerst het kwadraat afsplitsen :

(i) $(x+2)2 = x2 + 4x + 4$

(ii) $x^2 + 4x + 9 = 0$

$x^2 + 4x + 4 + 5 = 0$

$(x+2)^2 + 5 = 0$

$(x+4)^2 = -5 = 5i^2$

$x + 2 = \sqrt{5}\, i \quad v \quad x + 2 = -\sqrt{5}\, i$

$x = -2 + \sqrt{5}\, i \quad v \quad x = -2 - \sqrt{5}\, i$

b. (i) $(x - 2\frac{1}{2})^2 = x^2 - 5x + 6¼$

(ii) $x^2 - 5x - 20 = 0$

$x^2 - 5x + 6¼ + 10 = 0$

$(x - 2\frac{1}{2})^2 + 10 = 0$

$(x - 2\frac{1}{2})^2 = -10 = 10i^2$

$x - 2½ = \sqrt{10}i \quad v \quad x - 2½ = -\sqrt{10}i$

$x = 2\frac{1}{2} + \sqrt{10}i \quad v \quad x = 2\frac{1}{2} - \sqrt{10}i$

LES 2 : REKENEN MET COMPLEXE GETALLEN

DEFINITIE GECONJUNGEERDE

$\bar{z} =$ { geconjungeerde van z }

Als $z = a + bi$ dan is $\bar{z} = a - bi$

VIER BEWERKINGEN

Er zijn vier bewerkingen die we uitleggen aan de hand van een voorbeeld.

VOORBEELD 1

(1) Plus $(3 + 4\mathrm{i}) + (5 + 7\mathrm{i}) = 8 + 11\mathrm{i}$

(2) Min $(3 + 4\mathrm{i}) - (5 + 7\mathrm{i}) = -2 - 3\mathrm{i}$

(3) Keer $(3 + 4\mathrm{i}) \cdot (5 + 7\mathrm{i}) =$
$15 + 21\mathrm{i} + 20\mathrm{i} + 28i^2 = 15 + 41\mathrm{i} - 28 = -13 + 41\mathrm{i}$

(4) Delen $\frac{3+4i}{5+7i} = \frac{3+4i}{5+7i} \times \frac{5-7i}{5-7i} = \frac{15-21i+20i-28i^2}{25-49i^2} = \frac{15-1i+28}{25+49} = \frac{43-i}{74} = \frac{43}{74} - \frac{1}{74}i$

PARAGRAAF 8.2 : HET COMPLEXE VLAK

LES 1 : TEKENEN IN HET COMPLEXE VLAK

EEN AANTAL BEGRIPPEN BIJ DE COMPLEXE VECTOR Z

Gegeven is het complexe getal $z = 1 + 2i$. Een aantal begrippen / definities :

(1) | z | = {Modulus van z} = $\sqrt{a^2+b^2}$ = { Lengte van de vector / straal van de cirkel }

VOORBEELD

$|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$

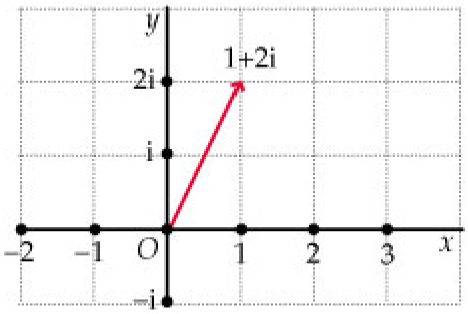
(2) Re (z) = a en Im (z) = b

VOORBEELD

$Re\,(1 + 2i) = 1$

$Im\,(1 + 2i) = 2$

(3) Tekenen van $z = 1 + 2i$



(4) Arg (z) = { Het argument van z } = { Hoek met de positieve x-as }

VOORBEELD

$Arg\,(1 + i) = 45\circ \;\; want\; tan\;\alpha = \frac{1}{1}\; dus\;\alpha = 45°$

VOORBEELD 1

Teken de volgende figuren

a. $Im\ (z) = 3$

b. $Im(z) + Re\ (z) = 4$

c. $|\ z\ | = 2$

d. $|\ z - 1 - 2i\ | = 3$

e. $45° \leq Arg \leq 90°$

OPLOSSING 1

a. Im (z) = 3 → y = 3

b. Im(z) + Re (z) = 4 → x + y = 4 → y = 4 - x

c. | z | = 2 → $\sqrt{a^2 + b^2} = 2 \rightarrow a^2 + b^2 = 2^2$ (dit is een cirkel met straal 2)

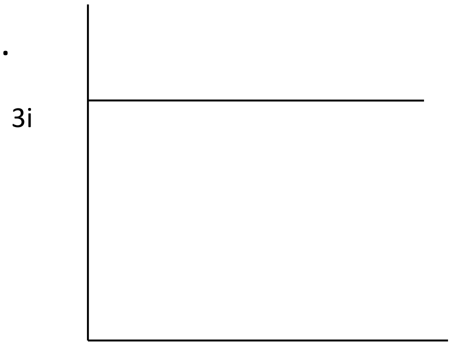
d. | z – 1 – 2i | = 3 → $\sqrt{a^2 + b^2} = 3 \rightarrow a^2 + b^2 = 3^2$ (dit is een cirkel met straal 3 en middelpunt 1 + 2i)

e. 45◦ ≤ Arg ≤ 90◦ (hoek tussen 45 en 90 graden)

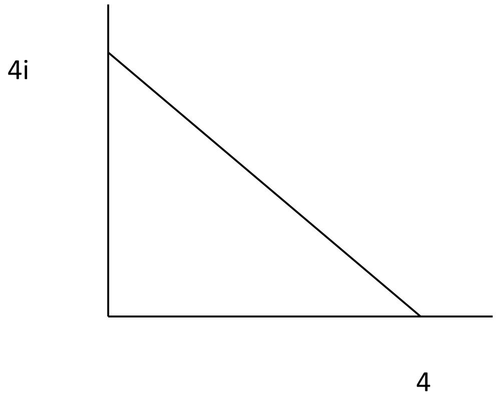
Voor de tekeningen zie de volgende pagina !!!

TEKENINGEN 1

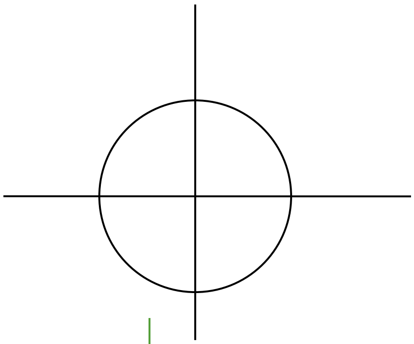
a.



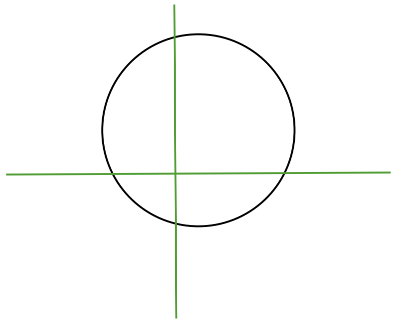
b.



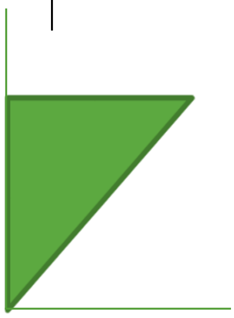
c.



d.

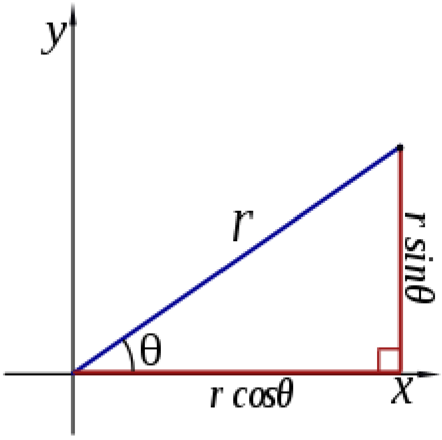


e.



LES 2 : POOLCOÖRDINATEN

THEORIE COMPLEXE GETALLEN



(1) Er geldt : $\sin(\theta) = \frac{y\text{−}coordinaat}{r}$ $dus\ y = r \cdot \sin(\theta)$

(2) Zo ook : $\cos(\theta) = \frac{x\text{−}coordinaat}{r}$ $dus\ x = r \cdot \cos(\theta)$

(3) In het complexe vlak :

$z = x + iy = r \cdot \cos(\theta) + ir \cdot \sin(\theta) = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$

(4) Je kunt ze als volgt berekenen

(1) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

(2) $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$ (en let op kwadrant en -180 ≤ θ ≤ 180)

VOORBEELD 1

Schrijf als poolcoördinaat :

a. $z = 1 + i$

b. $z = 1 - \sqrt{3}\, i$

c. $z = -3 + 2i$

OPLOSSING 1

a. $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\tan(\theta) = \frac{1}{1} \rightarrow \theta = 45°$

Dus $z = x + iy = \sqrt{2}(\cos(45) + i\sin(45))$

b. $r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$

$\tan(\theta) = \frac{-\sqrt{3}}{1} \rightarrow \theta = -60°$

Dus $z = x + iy = 2(\cos(-60) + i\sin(-60))$

c. $r = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{11}$

Je kunt nu ook met de knop Angle werken. Dit gaat als volgt :

- Mode → Real ⇨ a+bi
- Catalog (2nd 0) → Angle (-3+2i) = 146 $\rightarrow \theta = 146°$

Dus $z = x + iy = \sqrt{2}(\cos(146) + i\sin(146))$

PARAGRAAF 8.3 : DE FORMULE VAN DE MOIVRE

LES 1 REGELS VAN DE MOIVRE (POOLCOÖRDINATEN)

REGELS VAN DE MOIVRE VOOR VERMENIGVULDIGEN EN DELEN

Er gelden een aantal formules :

(1) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ (Stralen van de losse delen mag je keer doen)

(2) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ (Stralen mag je delen)

(3) $Arg(z_1 \cdot z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2)$ (Hoeken bij elkaar optellen bij keer)

(4) $Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Arg(z_1) - Arg(z_2)$ (Hoeken van elkaar aftrekken bij deel)

VOORBEELD 1

Bewijs $|z_1 \cdot z_2|$ op het bord uitschrijven

VOORBEELD 2

Geef de modulus (=r) en het Argument (=θ) van

a. $z = (3 + i)(3 - 4i)$

b. $z = \frac{3+i}{3-4i}$

OPLOSSING 2

a. $z_1 \;=\; 3 + i$

$r_1 = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

$Arg(z_1) = (Angle(3 + i) \;=\; 18°$ *{ Knop Angle op de GR }*

$z_2 \;=\; 3 - 4i$

$r_2 = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$

$Arg(z_2) = Angle(3 - 4i) \;=\; -53°$ *{ Knop Angle op de GR }*

Nu kun je met de regels van de Moivre de straal en de hoek berekenen :

$z = z_1 \cdot z_2$

$r = r_1 \cdot r_2 = 5 \cdot \sqrt{10}$

$Arg(z) = Arg(z_2) + Arg(z_2) = 18 + -53 = -35$

b. $z = \frac{z_1}{z_2}$

$r = \frac{r_1}{r_2} = \frac{5}{\sqrt{10}}$

$Arg(z) = Arg(z_2) - Arg(z_2) = 18 - -53 = 71$

OPMERKING

Je kunt controleren door bij a. de vermenigvuldiging uit te voeren :

$z = (3 + i)(3 - 4i) = 9 - 12i + 3i - 4i^2 = 13 - 9i$

Dit geeft $r = 5 \cdot \sqrt{10}$

Angle= 18 + -53 = -35°

LES 2 FORMULE VAN DE MOIVRE (POOLCOÖRDINATEN)

FORMULE VAN DE MOIVRE :

$z^n = (r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$

VOORBEELD 1

Bereken

a. $(3 + i)^5$

b. $(3 - 4i)^5$

OPLOSSING 1

a. $z_1 = 3+i$ → $r = \sqrt{(3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ Angle(3+i) = 18°

$(3+i)^5$ → $r^5 = \sqrt{10}^5 = 100\sqrt{10}$ Angle = 5·18 = 90

Nu de formule van de Moivre gebruiken :

$(3 + i)^5 = (\sqrt{10}(cos(18) + i\,sin(18))^5 = \sqrt{10}^5(cos(90) + i\,sin(90))$

$(3 + i)^5 = 10^{2,5}(0 + i \cdot 1) = 10^{2,5}i$

b. $z_2 = 3-4i$ → $r = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = 5$ Angle(3-4i) = -53°

$(3-4i)^4$ → $r^4 = 5^4 = 625$ Angle = 4·-53 = -212

Nu de formule van de Moivre gebruiken :

$(3 - 4i)^5 = (5(cos(-53) + i\,sin(-53))^4 = 625(cos(-212) + i\,sin(-212))$

LES 3 COMPLEXE MACHTSVERGELIJKINGEN OPLOSSEN

STAPPENPLAN VOOR COMPLEXE 3^{E} (4^{E}) GRAADS VERGELIJKINGEN OPLOSSEN

(1) Schrijf het getal rechts als poolcoördinaat.

(2) Schrijf 3 (4) verschillende oplossingen op die een hoek van 360 graden verschillen.

(3) Gebruik de Moivre om de 3 (4) vergelijkingen op te lossen.

VOORBEELD 1

Los op

a. $z^3 = 4i$

b. $(z-1)^2 = -25$

OPLOSSING 1

a. Schrijf 4i eerst als poolcoördinaat

(1) $z^3 = 4i = 4(\cos(90) + i\sin(90))$

(2) De drie oplossingen zijn

- $z^3 = 4(\cos(90) + i\sin(90))$
- $z^3 = 4(\cos(450) + i\sin(450))$ (+360)
- $z^3 = 4(\cos(810) + i\sin(810))$ (+360)

(3) De echte oplossingen zijn

- $z = \sqrt[3]{4}(\cos(30) + i\sin(30))$
- $z = \sqrt[3]{4}(\cos(150) + i\sin(150))$
- $z = \sqrt[3]{4}(\cos(270) + i\sin(270)) = 0 - \sqrt[3]{4}\, i$

b. Schrijf -25 eerst als poolcoördinaat

(1) $(z-1)^2 = -25$ → $p^2 = 25(\cos(180) + i\sin(180))$

(2) De drie oplossingen zijn

- $p^2 = 25(\cos(180) + i\sin(180))$
- $p^2 = 25(\cos(540) + i\sin(540))$ (+360)

(3) De echte oplossingen voor p zijn

- $p = 25(cos(90) + i\,sin(90)) = 0 + 25i = 25i$
- $p = 25\big(cos(270) + i\,sin(270)\big) = 0 - 25i = -25i$ (+360)

Dus $z = 1 + 5i$ of $z = 1 - 5i$

PARAGRAAF 8.4 : COMPLEXE FUNCTIES

LES 1 HET COMPLEXE VLAK

VOORBEELD 1

Gegeven is het vlak met domein $2 \leq Re(z) \leq 3$ en $1 \leq Im(z) \leq 2$

a. Teken dit vlak van z.

Het vlak z wordt door Jan gedraaid volgens de formule $f(z) = (1 + i) \cdot z$ met bovengenoemde domein.

b. Bepaal het bereik.

c. Teken het bereik in dezelfde tekening. Hoe is het bereik ontstaan uit het domein.

Het vlak z wordt door Kees behandeld volgens de formule f(z) = 4 + 2i - z met bovengenoemde domein.

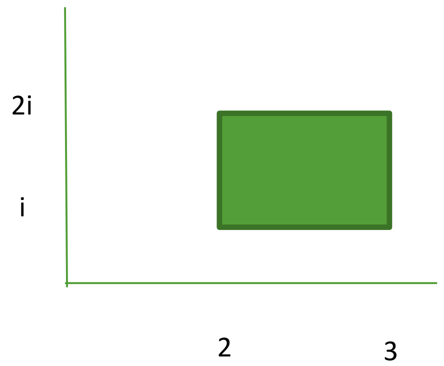
d. Teken het bereik van deze functie in een nieuwe tekening.

e. Bepaal het nulpunt bij oneindig domein.

f. Bepaal het dekpunt bij oneindig domein.

OPLOSSING 1

a.



b. Voor de functie $f(z)$ wordt ieder complex getal dat wordt ingevuld vermenigvuldigd met $1+i$. We gaan alle nieuwe hoekpunten berekenen :

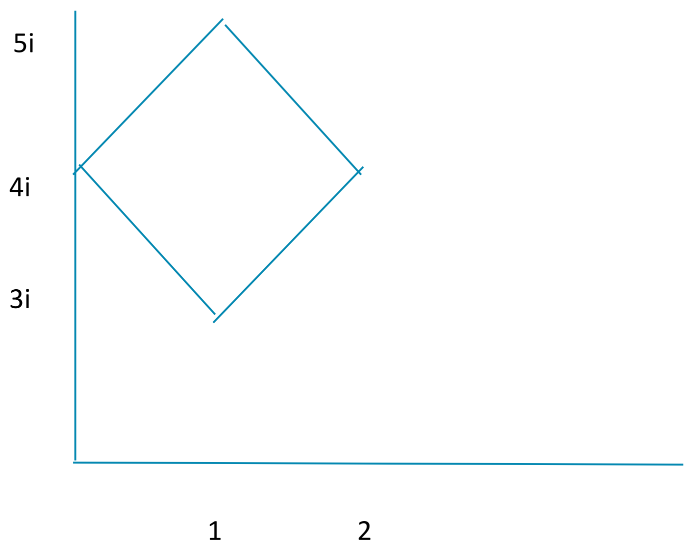
(1) Hoekpunt $A = (2,1)$
$f(A') = (1+i)\cdot(2+i) = 2+3i+i^2 = 1+3i$

(2) *Hoekpunt* $B = (2,1)$
$f(B') = (1+i)\cdot(3+i) = 3+4i+i^2 = 2+4i$

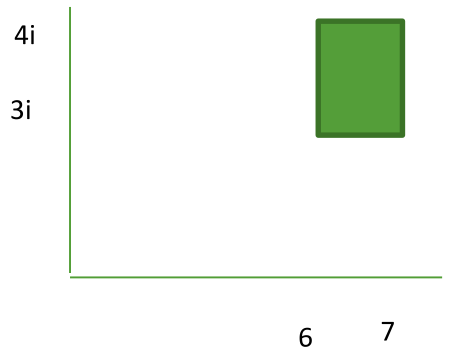
(3) *Hoekpunt* $C = (2,1)$
$f(C') = (1+i)\cdot(3+2i) = 3+5i+2i^2 = 1+5i$

(4) *Hoekpunt* $D = (2,1)$
$f(D') = (1+i)\cdot(2+2i) = 2+4i+2i^2 = 0+4i$

c. Je kunt dit doen door vanuit ieder hoekpunt 45 graden verder te tekenen met de goede straal!! De blauwe gedraaide rechthoek is het bereik.



d.



Opmerking : 4 hoger en 2i hoger.

e. Nulpunt :

$4 + 2i - z = 0$

$z = 4 + 2i$

f. Dekpunt :

$4 + 2i - z = z$

$2z = 4 + 2i$

$z = 2 + i$

OPMERKING BIJ VRAAG B

Je kunt het ook op een andere manier berekenen.

(1) Voor de functie $f(z)$ wordt ieder complex getal dat wordt ingevuld vermenigvuldigd met $1 + i$. We gaan eerst de straal en de hoek van $1 + i$ berekenen :

$z = 1 + i$ → $r = \sqrt{(1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ $Angle(1 + i) = 45°$

(2) Ieder hoekpunt wordt met $\sqrt{2}$ vermenigvuldigd en gedraaid over $45°$. Dus :

Hoekpunt $\boldsymbol{A = (2, 1)}$

$r_A = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ $Angle(2 + i) = 27°$

Invullen in $f(z) = (1 + i) \cdot z$ geeft het beeld A’ met coördinaten

$r_{A'} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{10}$ $Angle(A') = 45 + 27 = 72°$

Etc.