

PARAGRAAF 8.1 : VECTOREN EN LIJNEN

LES 1 : VECTOREN

DEFINITIES

- Vector $x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ wil zeggen a naar rechts en b omhoog.

VOORBEELD 1

Neem de vectoren $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $w = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

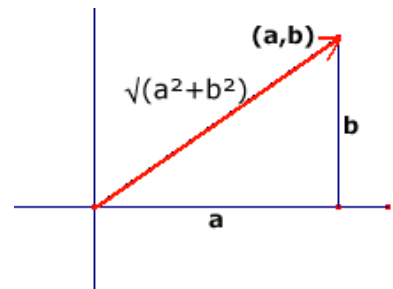
- Bereken en teken de lengte van v.
- Teken en bereken $v + w$ en $v + 2w$
- Teken en bereken $v - w$.

OPLOSSING 1

a. Lengte van vector $x \rightarrow |x| = \sqrt{a^2 + b^2} =$

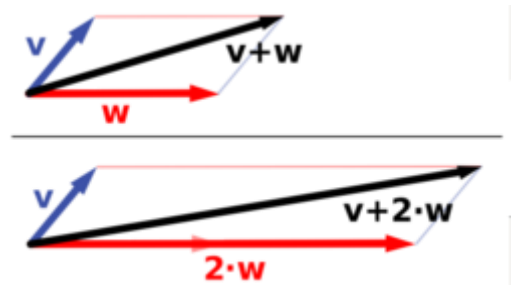
(i) Tekenen geeft

(ii) $x = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$



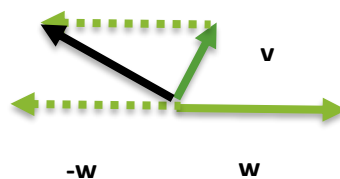
b. (i) Tekenen geeft

(ii) $v + w = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $v + 2w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$



c. (i) Tekenen geeft

(ii) $v - w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$



DEFINITIES BIJ EEN VECTORVOORSTELLING:

- Vectorvoorstelling = { vergelijking van de lijn uitgedrukt in vectoren }
- r = richtingsvector
- Vectorvoorstelling = steunvector + $\alpha \cdot$ richtingsvector
- Vectorvoorstelling = $A + \alpha \cdot (B - A)$

VOORBEELD 2

Neem de punten $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ en $W = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Stel een vectorvoorstelling op van de lijn l door V en W .
- Bepaal het snijpunt van lijn l met de y -as.

OPLOSSING 2

a. Steunvector = $w = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\text{Richtingsvector} = V - W = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Vectorvoorstelling: } l = W + \alpha (V - W) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2\alpha \\ 1 - 3\alpha \end{pmatrix}$$

b. Snijpunt y -as, dan is de $x = 0$ $\rightarrow \begin{pmatrix} 3 - 2\alpha \\ 1 - 3\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \end{pmatrix}$

$$3 - 2\alpha = 0 \rightarrow \alpha = 1,5 \quad \rightarrow \begin{pmatrix} 3 - 2 \cdot 1\frac{1}{2} \\ 1 - 3 \cdot 1\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

PARAGRAAF 8.2 : VECTOREN EN HOEKEN

LES 1 : INPRODUCT EN HOEKEN

Het **inproduct** van de vectoren $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ en $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ is gedefinieerd als

$$a \cdot b = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

De **hoek α** tussen twee vectoren a en b is gedefinieerd als

$$\cos \alpha = \frac{a \cdot b}{|a||b|} \text{ met } 0 \leq \alpha \leq 90$$

VOORBEELD 1

Gegeven zijn de vectoren $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Bereken het inproduct van a en b.
- Bereken de hoek tussen de vectoren a en b. Maak eerst een schets.

Gegeven zijn ook de lijnen $l_1: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \vartheta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $l_2: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

- Bereken de hoek tussen de lijnen l_1 en l_2 .

OPLOSSING 1

a. $a \cdot b = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 1 = 17$

b. $|a| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ en $|b| = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$

$$\cos \alpha = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{17}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{26}} = 0,9246 \dots$$

$$\alpha = 22$$

- c. De hoek tussen de twee lijnen wordt bepaald door de richtingsvectoren !!!

$$r_1 \cdot r_2 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot -3 = -1$$

$$|r_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \text{ en } |r_2| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$

$$\cos \alpha = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{-1}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{2}} = -0,196 \dots$$

$$\alpha = 101$$

Omdat $\alpha > 90$ geldt dat de hoek $= 180 - \alpha = 180 - 101 = 79$

DEFINITIES

(1) Als twee vectoren loodrecht op elkaar staan, dan is het inproduct nul

(2) Dit kun je zien aan de formule voor de hoek :

$$\cos \alpha = \frac{a \cdot n}{|a||n|} = \frac{0}{|a||n|} = 0 \rightarrow \alpha = 90$$

(3) Normaalvector (n) = { een vector die loodrecht staat op een andere vector }

DE NORMAALVECTOR

(1) De normaalvector n_v staat loodrecht op de richtingsvector r_v

(2) Truc bepalen normaalvector van $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rightarrow n_v = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ of $n = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$

(3) Als de normaalvector $n_v = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ dan is de vergelijking van de lijn $-bx + ay = c$

VOORBEELD 1

Gegeven zijn de punten $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$. Lijn k gaat door A en B.

- Bepaal de vectorvoorstelling van lijn k.
- Bepaal, met behulp van de rc, de vergelijking van lijn k in de vorm $ax + by = c$
- Bepaal de normaalvector van deze lijn k. Wat valt je op ?
- Bepaal de vergelijking van lijn k via de normaalvector om de lijn $ax + by = c$ op te stellen.

Gegeven is ook lijn $l_1: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

- Bepaal de vergelijking van lijn l_2 .
- Bepaal het snijpunt van deze twee lijnen

OPLOSSING 1

a. $r = a - b = \begin{pmatrix} 3-5 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $s = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

lijn $l_1: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \vartheta \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b. $rc = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-2}{5-3} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$

$y = -\frac{1}{2}x + b$ en punt $(5,1) \rightarrow 1 = -\frac{1}{2} \cdot 5 + b \rightarrow b = 3\frac{1}{2}$

Dus $y = -\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}x + y = 3\frac{1}{2}$ oftewel $x + 2y = 7$

c. Normaalvector staat loodrecht op de richtingsvector, dus $n \cdot r = 0$

Dus $n \cdot r = n_1 \cdot -2 + n_2 \cdot 1 = 0$

Dus $n = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (of een veelvoud daarvan)

d. (1) $n = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dus $ax + by = c \rightarrow x + 2y = c$

(2) Punt $(5,1) \rightarrow 5 + 2 \cdot 1 = c \rightarrow c = 7$

(3) Vergelijking $\rightarrow x + 2y = 7$

e. (1) $n = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow 3x + 2y = c$

(2) Punt $(7,9) \rightarrow 3 \cdot 7 + 2 \cdot 9 = 39 \rightarrow c = 39$

(3) Vergelijking $\rightarrow 3x + 2y = 39$

f. $x = 7 + 2\mu$ en $y = 9 - 3\mu$. Deze kun je invullen in $x + 2y = 7$. Dit geeft :

$$7 + 2\mu + 2(9 - 3\mu) = 7$$

$$7 + 2\mu + 18 - 6\mu = 7$$

$$-4\mu = -18$$

$$\mu = 4\frac{1}{2}$$

Dit geeft $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix} + 4\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -4\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \text{Snijpunt } S$

OPMERKING

Je kunt natuurlijk ook het stelsel $2x - 3y = -13$ en $3x + 2y = 39$ oplossen.

PARAGRAAF 8.4 : VERGELIJKINGEN VAN VLAKKEN

LES 1 : DE VECTORVOORSTELLING EN DE VERGELIJKING VAN EEN VLAK

Je kunt een vlak op twee manieren weergeven :

(1) Met een vectorvoorstelling.

- Een vlak bestaat uit één steunvector en twee richtingsvectoren
- Dus $V = s + \alpha \cdot r_1 + \beta \cdot r_2$.
- Voorbeeld $V : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

(2) Met een vergelijking

Als je twee of drie snijpunten met de assen weet kun je gebruik maken van de assenvergelijking :

Neem $P = (p,0,0)$, $Q=(0,q,0)$ en $R=(0,0,r)$.

Dan geldt als **vergelijking voor vlak V** : $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$

Als je deze vergelijking vermenigvuldigt met pqr ontstaat er voor vlak V de vergelijking $qrx + pry + pqz = pqr$. Dit is mooier te schrijven als :

$ax + by + cz = d$ waarbij de **normaalvector** $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ van vlak V hoort.

VOORBEELD 1

Gegeven is vlak $V : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

- Bereken de snijpunten met de y -as.
- Ligt het punt $(2,1,1)$ in het vlak.

Gegeven is een vlak door $(3,0,0)$ en $(0,5,0)$. Bepaal de vergelijking en de normaalvector als het vlak gaat :

- door $(0,0,7)$.
- door $(9, -5, -2)$. (Noem dit vlak W)
- Bepaal het snijpunt S van de lijn $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ met vlak W .

OPLOSSING 1

a. $x = 0$ en $z = 0$ geeft $\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Hieruit volgt :

$$(i) \quad 3 - 2\alpha = 0 \rightarrow \alpha = 1\frac{1}{2}$$

$$(ii) \quad 1 + 4\alpha + 3\beta = 0 \rightarrow 1 + 4 \cdot 1\frac{1}{2} + 3\beta = 0 \rightarrow 3\beta = -7 \rightarrow \beta = -\frac{7}{3}$$

$$(iii) \quad y = 0 + 2 \cdot 1\frac{1}{2} + 2 \cdot -\frac{7}{3} = \frac{9}{3} - \frac{14}{3} = -\frac{5}{3}$$

b. Dan moet $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$(i) \quad 3 - 2\alpha = 1 \rightarrow \alpha = 1$$

$$(ii) \quad 2\alpha + 2\beta = 1 \rightarrow 2 \cdot 1 + 2\beta = 1 \rightarrow \beta = -\frac{1}{2}$$

$$(iii) \quad 1 + 4\alpha + 3\beta = 2 \rightarrow 1 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot -\frac{1}{2} = 1 + 4 - 1\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2} \neq 1 \rightarrow \text{Nee!}$$

c. $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} + \frac{z}{7} = 1$ ($\times 3 \cdot 5 \cdot 7 \rightarrow \times 105$)

$$35x + 21y + 15z = 105 \text{ met normaalvector } n = \begin{pmatrix} 35 \\ 21 \\ 15 \end{pmatrix}$$

d. $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} + \frac{z}{r} = 1$ en vul in punt $(9, -5, -2)$.

(i) Dit geeft $\frac{9}{3} + \frac{-5}{5} + \frac{-2}{r} = 1 \rightarrow 3 - 1 - \frac{2}{r} = 1 \rightarrow -\frac{2}{r} = -1 \rightarrow r = 2$

(ii) Vlak W : $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} + \frac{z}{2} = 1$ ($\times 3 \cdot 5 \cdot 2 = \times 30$) $\rightarrow 10x + 6y + 15z = 30$

met normaalvector $n = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix}$

e. $x = 1 + \lambda$ en $y = 2\lambda$ en $z = 2 - 2\lambda$ invullen in W : $10x + 6y + 15z = 30$. Dit geeft

$$10(1 + \lambda) + 6(2\lambda) + 15(2 - 2\lambda) = 30$$

$$10 + 10\lambda + 12\lambda + 30 - 30\lambda = 30$$

$$-8\lambda = -10 \rightarrow \lambda = \frac{10}{8} = 1\frac{1}{4}$$

$$\text{Dus } x = 1 + 1\frac{1}{4} = 2\frac{1}{4} \text{ en } y = 2 \cdot 1\frac{1}{4} = 2\frac{1}{2} \text{ en } z = 2 - 2 \cdot 1\frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Dus } S = (2\frac{1}{4}, 2\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$$

LES 2 : DE VERGELIJKING VAN EEN VLAK MET UITPRODUCT

DEFINITIE UITPRODUCT

Gegeven zijn twee vectoren $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ en $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Het **uitproduct** van de vectoren a en b is gedefinieerd als

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

Normaalvector van een vlak = { het uitproduct van de twee richtingsvectoren }

VOORBEELD 1

Gegeven is vlak $V : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Bepaal de vergelijking van vlak V in de vorm $ax + by + cz = d$ (met a, b, c, d hele getallen)

OPLOSSING 1

$$(i) \quad r_1 \times r_2 = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 - -2 \cdot 2 \\ -2 \cdot 3 - 4 \cdot 0 \\ 4 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = \text{normaalvector } V = n$$

$$(ii) \quad ax + by + cz = d \quad \rightarrow 4x - 6y + 2z = d$$

Punt $(1,2,3)$ invullen $\rightarrow 4 \cdot 1 - 6 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = d$

$$\rightarrow 4 - 12 + 6 = -2 = d$$

$$(iii) \quad \text{Dus } V \text{ is} \quad \rightarrow 4x - 6y + 2z = -2$$

OPMERKING

Om het uitproduct makkelijker uit te rekenen, kun je gebruik maken van het "Amsterdammertje" :

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{X} \\ \text{X} \\ \text{X} \\ \text{X} \\ \text{X} \\ \text{X} \end{matrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 - -2 \cdot 2 \\ -2 \cdot 3 - 4 \cdot 0 \\ 4 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

PARAGRAAF 6.5 : HOEKEN IN DE RUIMTE

LES 1 : HOEK TUSSEN LIJN/LIJN EN LIJN/VLAK

DEFINITIE HOEKEN

De **hoek** tussen **twee lijnen** = { de hoek tussen twee richtingsvectoren r_1 en r_2 } =

$$\cos \alpha = \frac{r_1 \cdot r_2}{|r_1||r_2|} \text{ met } 0 \leq \alpha \leq 90$$

De **hoek** tussen een **lijn** l met richtingsvector r_1 en de **normaalvector** n van vlak V bereken je in twee stappen :

(1) $\cos \beta = \frac{r_1 \cdot n}{|r_1||n|}$

(2) Dan is de **hoek tussen vlak V en lijn l** gelijk aan $\angle(V, l) = 90 - \beta$.

VOORBEELD 1

Gegeven zijn vlak $V : 4x - 6y + 2z = -2$ en lijn $l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bereken de hoek tussen vlak V en lijn l .

OPLOSSING 1

(i) Gegeven $r_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $n = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$

(ii) $r_1 = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{11}$
 $n = \sqrt{4^2 + (-6)^2 + 2^2} = \sqrt{56}$
 $r_1 \cdot n = 3 \cdot 4 + (-1) \cdot (-6) + 1 \cdot 2 = 20$

(iii) $\cos \beta = \frac{r_1 \cdot n}{|r_1||n|} = \frac{20}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{56}} = 0,8058 \dots$
 $\beta = 36^\circ$

(iv) Dan geldt $\angle(V, l) = 90 - \beta = 90 - 36 = 54^\circ$

LES 2 : HOEK TUSSEN VLAK/VLAK

De **hoek** tussen **twee vlakken** = hoek tussen de twee **normaalvectoren** n_1 en n_2 is

$$\cos \alpha = \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1| |n_2|} \text{ met } 0 \leq \alpha \leq 90$$

VOORBEELD 1

Gegeven zijn vlak $V : 4x - 6y + 2z = -2$ en vlak $W : x + 2y + 3z = 10$

Bereken de hoek tussen vlak V en vlak W .

OPLOSSING 1

(i) Je weet dat $n_V = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $n_W = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(ii) $n_W = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$
 $n_V = \sqrt{4^2 + (-6)^2 + 2^2} = \sqrt{56}$
 $n_1 \cdot n_2 = 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-6) + 3 \cdot 2 = -2$

(iii) $\cos \beta = \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1| |n_2|} = \frac{-2}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{56}} = -0,0714 \dots$
 $\beta = 94^\circ$

(iv) Omdat $94 > 90$ is $\angle(V, W) = 180 - 94 = 86^\circ$

PARAGRAAF 6.6 : AFSTANDEN EN VECTOREN

LES 1 : AFSTANDEN PUNT/PUNT EN PUNT/LIJN

DEFINITIES

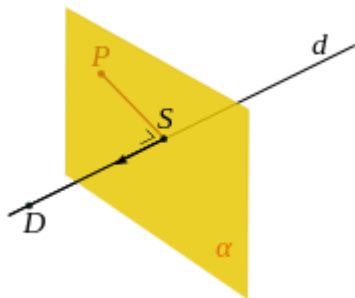
- $d(P,Q) = \{ \text{De afstand tussen punt P en punt Q} \} = |PQ|$
- $d(l, ABC) = \{ \text{De afstand tussen lijn l en vlak ABC} \}$

De **afstand** tussen **punt P en punt Q** is

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + (z_p - z_q)^2}$$

Om de afstand tussen een punt en een lijn te bepalen is een stappenplan nodig :

STAPPENPLAN PUNT / LIJN



De afstand van een punt P tot lijn l :

- (i) Maak een vlak V door P dat loodrecht staat op lijn l .
- (ii) De richtingsvector van lijn l is de normaalvector van V !! ($r_l = n_v$)
- (iii) Gebruik punt P om de d uit te rekenen.
- (iv) Bereken de coördinaten van het snijpunt van V en l . Noem dit punt Q .
- (v) $d(P, l) = d(P, Q) = |PQ|$

VOORBEELD 1

Gegeven is lijn $l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ en de punten $P = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $T = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

- Bereken afstand tussen punt P en punt T
- Bereken de afstand tussen punt P en lijn l.

OPLOSSING 1

- De afstand tussen punt P en punt Q is

$$d(P, T) = \sqrt{(11 - 4)^2 + (6 - (-1))^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{49 + 25 + 4} = \sqrt{78}$$

- We volgen het stappenplan :

(i) Maak een vlak door P loodrecht op lijn l.

(ii) De normaalvector $n = r_l = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

(iii) Vlak $V : 5x + 2y - 2z = d$ en $P = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

Invullen van punt P geeft : $5 \cdot 11 + 2 \cdot 6 - 2 \cdot 1 = 65 = d$

Dus V is $5x + 2y - 2z = 65$

(iv) $l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 5\alpha \\ 2\alpha \\ 3 - 2\alpha \end{pmatrix}$. Vul dit in in de vergelijking van V :

$$5(1 + 5\alpha) + 2 \cdot 2\alpha - 2(3 - 2\alpha) = 65$$

$$5 + 25\alpha + 4\alpha - 6 + 4\alpha = 65$$

$$33\alpha = 66 \rightarrow \alpha = 2$$

Dus $Q = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

- De afstand tussen punt P en punt Q is

$$d(P, l) = d(P, Q) = \sqrt{(11 - 11)^2 + (6 - 4)^2 + (1 - (-1))^2} = \sqrt{0 + 4 + 4} = \sqrt{8}$$

LES 2 : AFSTANDEN TUSSEN PUNT EN VLAK

Om de afstand tussen een punt en een vlak te bepalen is een stappenplan nodig :

STAPPENPLAN

De afstand van een punt P tot vlak V :

- (i) Bepaal de vergelijking van een vlak V
- (ii) Bepaal de lijn k die loodrecht staat op het vlak door punt P
- (iii) Bereken de coördinaten van het snijpunt van n en V. Noem dit punt Q.
- (iv) $D(P,V) = d(P,Q) = |PQ|$

VOORBEELD 1

Gegeven is een vlak V door $(3,0,0)$; $(0,5,0)$ en $(0,0,7)$.

Bepaal de afstand van dit vlak tot het punt $(1, 5, 2)$.

OPLOSSING 1

(i) $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} + \frac{z}{7} = 1$ ($\times 3 \cdot 5 \cdot 7 \rightarrow \times 105$)

$$35x + 21y + 15z = 105$$

(ii) Normaalvector $n = \begin{pmatrix} 35 \\ 21 \\ 15 \end{pmatrix} = r_k$ (=richtingsvector van k)

$$\text{Dus } k : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 35 \\ 21 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 35\alpha \\ 5 + 21\alpha \\ 2 + 15\alpha \end{pmatrix}$$

(iii) Invullen van de coördinaten van lijn k in vlak V geeft :

$$35(1 + 35\alpha) + 21(5 + 21\alpha) + 15(2 + 15\alpha) = 105$$

$$35 + 1225\alpha + 110 + 441\alpha + 30 + 225\alpha = 105$$

$$1891\alpha + 175 = 105$$

$$1891\alpha = -70 \rightarrow \alpha = -\frac{70}{1891}$$

$$\text{De coördinaat kun je dan berekenen met } Q = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{70}{1891} \begin{pmatrix} 35 \\ 21 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-35}{1891} \\ \frac{7985}{1891} \\ \frac{2732}{1891} \end{pmatrix}$$

(iv) Nu je punt Q weet kun je de afstand PQ berekenen.