PARAGRAAF 8.1 : VECTOREN EN LIJNEN

LES 1 : VECTOREN

DEFINITIES

- Vector $x = \binom{a}{b}$ wil zeggen a naar rechts en b omhoog.

VOORBEELD 1

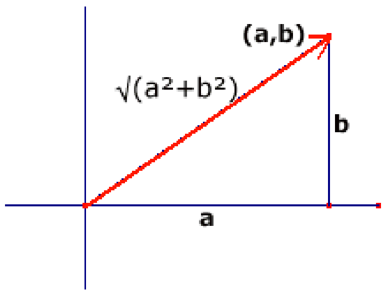
Neem de vectoren $v = \binom{1}{2}$ en w = $\binom{3}{1}$

a. Bereken en teken de lengte van v.

b. Teken en bereken *v + w* en *v +2w*

c. Teken en bereken v - w.

OPLOSSING 1



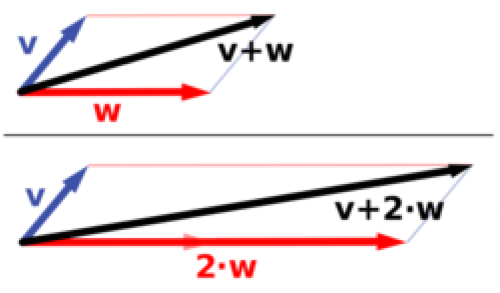
a. Lengte van vector x→ $|x| = \sqrt{a^2+b^2} =$

(i) Tekenen geeft

(ii) $x = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$

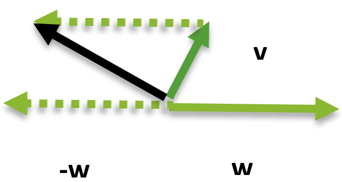
b. (i) Tekenen geeft

(ii) $v + w = \binom{4}{3}$ en $v + 2w = \binom{1}{2} + 2\binom{3}{1} = \binom{7}{4}$



c. (i) Tekenen geeft

(ii) $v - w = \binom{1}{2} - \binom{3}{1} = \binom{-2}{1}$



DEFINITIES BIJ EEN VECTORVOORSTELLING:

- Vectorvoorstelling = { vergelijking van de lijn uitgedrukt in vectoren }
- r = richtingsvector
- Vectorvoorstelling = steunvector + α · richtingsvector
- Vectorvoorstelling = A + α · (B – A)

VOORBEELD 2

Neem de punten V = $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ en W = $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

a. Stel een vectorvoorstelling op van de lijn *l* door V en W.

b. Bepaal het snijpunt van lijn *l* met de y-as.

OPLOSSING 2

a. Steunvector = w = $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Richtingsvector = V – W =$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Vectorvoorstelling: l = W + α (V – W) = $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 3 - 2\alpha \\ 1 - 3\alpha \end{pmatrix}$

b. Snijpunt y-as, dan is de x = 0 → $\begin{pmatrix} 3 - 2\alpha \\ 1 - 3\alpha \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \end{pmatrix}$

3 - 2α = 0 → α = 1,5 → $\begin{pmatrix} 3 - 2 \cdot 1\frac{1}{2} \\ 1 - 3 \cdot 1\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

PARAGRAAF 8.2 : VECTOREN EN HOEKEN

LES 1 : INPRODUCT EN HOEKEN

Het **inproduct** van de vectoren $a = \binom{a_1}{a_2}$ en $b = \binom{b_1}{b_2}$ is gedefinieerd als

$a \cdot b = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$

De **hoek α** tussen twee vectoren a en b is gedefinieerd als

$\cos\alpha = \frac{a \cdot b}{|a||b|}$ met $0 \leq \alpha \leq 90$

VOORBEELD 1

Gegeven zijn de vectoren $a = \binom{3}{2}$ en $b = \binom{5}{1}$

a. Bereken het inproduct van a en b.

b. Bereken de hoek tussen de vectoren a en b. Maak eerst een schets.

Gegeven zijn ook de lijnen $l_1: \binom{x}{y} = \binom{0}{3} + \vartheta\binom{1}{1}$ en $l_1: \binom{x}{y} = \binom{8}{9} + \mu\binom{2}{-3}$

c. Bereken de hoek tussen de lijnen l_1 en l_2.

OPLOSSING 1

a. $a \cdot b = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 1 = 17$

b. $|a| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}\ \ en\ |b| = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$

$$\cos\alpha = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{17}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{26}} = 0{,}9246 \ldots$$

$\alpha = 22$

c. De hoek tussen de twee lijnen wordt bepaald door de richtingsvectoren !!!

$r_1 \cdot r_2 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot -3 = -1$

$|r_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}\ \ en\ |r_2| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

$$\cos\alpha = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{-1}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{2}} = -0{,}196 \ldots$$

$\alpha = 101$

Omdat $\alpha > 90$ geldt dat de hoek $= 180 - \alpha = 180 - 101 = 79$

DEFINITIES

(1) Als twee vectoren loodrecht op elkaar staan, dan is het inproduct nul

(2) Dit kun je zien aan de formule voor de hoek :

$$\cos\alpha = \frac{a \cdot n}{|a||n|} = \frac{0}{|a||n|} = 0 \quad \rightarrow \alpha = 90$$

(3) Normaalvector (n) = { een vector die loodrecht staat op een andere vector }

DE NORMAALVECTOR

(1) De normaalvector n_v staat loodrecht op de richtingsvector r_v

(2) Truc bepalen normaalvector van $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rightarrow n_v = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}\ of\ n = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$

(3) Als de normaalvector $n_v = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ dan is de vergelijking van de lijn $-bx + ay = c$

VOORBEELD 1

Gegeven zijn de punten $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$. Lijn k gaat door A en B.

a. Bepaal de vectorvoorstelling van lijn k.

b. Bepaal, met behulp van de rc, de vergelijking van lijn k in de vorm ax + by = c

c. Bepaal de normaalvector van deze lijn k. Wat valt je op ?

d. Bepaal de vergelijking van lijn k via de normaalvector om de lijn ax + by = c op te stellen.

Gegeven is ook lijn l_1: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

e. Bepaal de vergelijking van lijn l_2.

f. Bepaal het snijpunt van deze twee lijnen

OPLOSSING 1

a. $r = a - b = \binom{3-5}{2-1} = \binom{-2}{1}$ en $s = \binom{5}{1}$

lijn l_1: $\binom{x}{y} = \binom{5}{1} + \vartheta \binom{-2}{1}$

b. $rc = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-2}{5-3} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$

$y = -\dfrac{1}{2}x + b \; en \; punt \; (5,1) \; \rightarrow 1 = -\dfrac{1}{2} \cdot 5 + b \rightarrow b = 3\dfrac{1}{2}$

Dus $y = -\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}x + y = 3\frac{1}{2}$ oftewel $x + 2y = 7$

c. Normaalvector staat loodrecht op de richtingsvector, dus $n \cdot r = 0$

Dus $n \cdot r = n_1 \cdot -2 + n_2 \cdot 1 = 0$

Dus $n = \binom{1}{2}$ (of een veelvoud daarvan)

d. (1) $n = \binom{1}{2}$ dus ax + by = c $\rightarrow$ $x + 2y = c$

(2) Punt $(5,1)$ $\rightarrow$ $5 + 2 \cdot 1 = c$ $\rightarrow c = 7$

(3) Vergelijking $\rightarrow$ $x + 2y = 7$

e. (1) $n = \binom{3}{2}$ $\rightarrow$ $3x + 2y = c$

(2) Punt $(7,9)$ $\rightarrow$ $3 \cdot 7 + 2 \cdot 9 = 39$ $\rightarrow c = 39$

(3) Vergelijking $\rightarrow$ $3x + 2y = 39$

f. $x = 7 + 2\mu \;\; en \; y = 9 - 3\mu$. Deze kun je invullen in $x + 2y = 7$. Dit geeft :

$$7 + 2\mu + 2(9 - 3\mu) = 7$$
$$7 + 2\mu + 18 - 6\mu = 7$$
$$-4\mu = -18$$
$$\mu = 4\frac{1}{2}$$

Dit geeft $\binom{x}{y} = \binom{7}{9} + 4\frac{1}{2}\binom{2}{-3} = \begin{pmatrix} 16 \\ -4\frac{1}{2} \end{pmatrix} = Snijpunt \; S$

OPMERKING

Je kunt natuurlijk ook het stelsel $2x - 3y = -13$ en $3x + 2y = 39$ oplossen.

PARAGRAAF 8.2 : VERGELIJKINGEN VAN VLAKKEN

LES 1 : DE VECTORVOORSTELLING EN DE VERGELIJKING VAN EEN VLAK

Je kunt een vlak op twee manieren weergeven :

(1) Met een vectorvoorstelling.

- Een vlak bestaat uit één steunvector en twéé richtingsvectoren
- Dus V = s + α $\cdot r_1$ + β $\cdot r_2$.
- Voorbeeld V : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

(2) Met een vergelijking

Als je twee of drie snijpunten met de assen weet kun je gebruik maken van de assenvergelijking :

Neem P = (p,0,0), Q=(0,q,0) en R=(0,0,r). Dan geldt als **vergelijking voor vlak V :** $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$

Als je deze vergelijking vermenigvuldigt met pqr ontstaat er voor vlak V de vergelijking $qrx + pry + pqz = pqr$. Dit is mooier te schrijven als :

$ax + by + cz = d$ waarbij de **normaalvector** $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ van vlak V hoort.

VOORBEELD 1

Gegeven is vlak V : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

a. Bereken de snijpunten met de y-as.

b. Ligt het punt (2,1,1) in het vlak.

Gegeven is een vlak door (3,0,0) en (0,5,0). Bepaal de vergelijking en de normaalvector als het vlak gaat :

c. door (0,0,7).

d. door (9, -5 , -2). (Noem dit vlak W)

e. Bepaal het snijpunt S van de lijn $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ met vlak W.

OPLOSSING 1

a. $x = 0 \; en \; z = 0$ geeft $\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Hieruit volgt :

$(i) \;\; 3 - 2\alpha = 0 \;\; \rightarrow \alpha = 1\frac{1}{2}$

$(ii) \;\; 1 + 4\alpha + 3\beta = 0 \rightarrow 1 + 4 \cdot 1\frac{1}{2} + 3\beta = 0 \rightarrow 3\beta = -7 \rightarrow \beta = -\frac{7}{3}$

$(iii) \; y = 0 + 2 \cdot 1\frac{1}{2} + 2 \cdot -\frac{7}{3} = \frac{9}{3} - \frac{14}{3} = -\frac{5}{3}$

b. Dan moet $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(i) \;\; 3 - 2\alpha = 1 \;\; \rightarrow \alpha = 1$

$(ii) \;\; 2\alpha + 2\beta = 1 \rightarrow 2 \cdot 1 + 2\beta = 1 \rightarrow \beta = -\frac{1}{2}$

$(iii) \;\; 1 + 4\alpha + 3\beta = 2 \rightarrow 1 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot -\frac{1}{2} = 1 + 4 - 1\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2} \neq 1 \;\; \rightarrow Nee$!

c. $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}+\frac{z}{7}=1\ (\times 3\cdot 5\cdot 7 \rightarrow \times 105)$

$35x+21y+15z=105$ met normaalvector $n=\begin{pmatrix}35\\21\\15\end{pmatrix}$

d. $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}+\frac{z}{r}=1\ \ en\ vul\ in\ punt\ (9,-5,-2).$

(i) Dit geeft $\frac{9}{3}+\frac{-5}{5}+\frac{-2}{r}=1 \rightarrow 3-1-\frac{2}{r}=1 \rightarrow\ -\frac{2}{r}=-1 \rightarrow r=2$

(ii) Vlak W : $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}+\frac{z}{2}=1\ (\times 3\cdot 5\cdot 2 =\times 30)\ \rightarrow 10x+6y+15z=30$

met normaalvector $n=\begin{pmatrix}10\\6\\15\end{pmatrix}$

e. $x=1+\lambda\ \ en\ \ \ y=2\lambda\ \ en\ z=2-2\lambda$ invullen in W : $10x+6y+15z=30$. Dit geeft

$10(1+\lambda)+6(2\lambda)+15(2-2\lambda)=30$

$10+10\lambda+12\lambda+30-30\lambda=30$

$-8\lambda=-10\ \rightarrow \lambda=\frac{10}{8}=1\frac{1}{4}$

Dus $x=1+1\frac{1}{4}=2\frac{1}{4}\ \ en\ \ \ y=2\cdot 1\frac{1}{4}=2\frac{1}{2}\ \ en\ z=2-2\cdot 1\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}$

Dus S = ($2\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}$)

LES 2 : DE VERGELIJKING VAN EEN VLAK MET UITPRODUCT

DEFINITIE UITPRODUCT

Gegeven zijn twee vectoren $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ en $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Het **uitproduct** van de vectoren a en b is gedefinieerd als

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

Normaalvector van een vlak = { het uitproduct van de twee richtingsvectoren }

VOORBEELD 1

Gegeven is vlak V : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Bepaal de vergelijking van vlak V in de vorm $ax + by + cz = d$ (met a,b,c,d hele getallen)

OPLOSSING 1

(i) $r_1 \times r_2 = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 - -2 \cdot 2 \\ -2 \cdot 3 - 4 \cdot 0 \\ 4 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = normaalvector\ V = n$

(ii) $ax + by + cz = d$ $\rightarrow 4x - 6y + 2z = d$

Punt (1,2,3) invullen $\rightarrow 4 \cdot 1 - 6 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = d$

$\rightarrow 4 - 12 + 6 = -2 = d$

(iii) Dus V is $\rightarrow 4x - 6y + 2z = -2$

OPMERKING

Om het uitproduct makkelijker uit te rekenen, kun je gebruik maken van het “Amsterdammertje“ :

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 - -2 \cdot 2 \\ -2 \cdot 3 - 4 \cdot 0 \\ 4 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

PARAGRAAF 8.3 : HOEKEN IN DE RUIMTE

LES 1 : HOEK TUSSEN LIJN/LIJN EN LIJN/VLAK

DEFINITIE HOEKEN

De **hoek** tussen **twee lijnen** = { de hoek tussen twee richtingsvectoren r_1 en r_2} =

$\cos\alpha = \frac{r_1 \cdot r_2}{|r_1||r_2|}$ met $0 \leq \alpha \leq 90$

De **hoek** tussen een **lijn** l met richtingsvector r_1 en de **normaalvector** n van vlak V bereken je in twee stappen :

(1) $\cos\beta = \frac{r_1 \cdot n}{|r_1||n|}$

(2) Dan is de **hoek tussen vlak V en lijn l** gelijk aan ∠ (V, l) = 90 – β.

VOORBEELD 1

Gegeven zijn vlak V : $4x - 6y + 2z = -2$ en lijn l : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bereken de hoek tussen vlak V en lijn l.

OPLOSSING 1

(i) Gegeven $r_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $n = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$

(ii) $r_1 = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{11}$

$n = \sqrt{4^2 + (-6)^2 + 2^2} = \sqrt{56}$

$r_1 \cdot n = 3 \cdot 4 + -1 \cdot -6 + 1 \cdot 2 = 20$

(iii) $\cos\beta = \frac{r_1 \cdot n}{|r_1||n|} = \frac{20}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{56}} = 0{,}8058 \ldots$

$\beta = 36°$

(iv) Dan geldt $\angle(V, l) = 90 - \beta = 90 - 36 = 54°$

LES 2 : HOEK TUSSEN VLAK/VLAK

De **hoek** tussen **twee vlakken** = hoek tussen de twee **normaalvectoren** n_1 en n_2 is

$\cos\alpha = \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1||n_2|}$ met $0 \leq \alpha \leq 90$

VOORBEELD 1

Gegeven zijn vlak V : $4x - 6y + 2z = -2$ en vlak W : $x + 2y + 3z = 10$

Bereken de hoek tussen vlak V en valk W.

OPLOSSING 1

(i) Je weet dat $n_V = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $n_W = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(ii) $n_W = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

$n_V = \sqrt{4^2 + (-6)^2 + 2^2} = \sqrt{56}$

$r_1 \cdot n = 1 \cdot 4 + 2 \cdot -6 + 3 \cdot 2 = -2$

(iii) $\cos\beta = \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1||n_2|} = \frac{-2}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{56}} = -0{,}0714 \ldots$

$\beta = 94°$

(iv) Omdat $94 > 90$ is $\angle(V, W) = 180 - 94 = 86°$

PARAGRAAF 8.4 : AFSTANDEN IN DE RUIMTE

LES 1 : AFSTANDEN PUNT/PUNT EN PUNT/LIJN

DEFINITIES

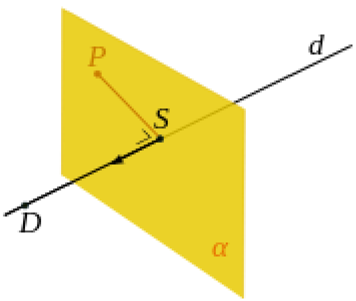
- d(P,Q) = { De afstand tussen punt P en punt Q } = $|PQ|$
- d(l , ABC) = { De afstand tussen lijn l en vlak ABC }

De **afstand** tussen **punt P en punt Q** is

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + (z_p - z_q)^2}$$

Om de afstand tussen een punt en een lijn te bepalen is een stappenplan nodig :

STAPPENPLAN PUNT / LIJN



De afstand van een punt P tot lijn l :

(i) Maak een vlak V door P dat loodrecht staat op lijn l.

(ii) De richtingsvector van lijn l is de normaalvector van V !! ($r_l = n_V$)

(iii) Gebruik punt P om de d uit te rekenen.

(iv) Bereken de coördinaten van het snijpunt van V en l. Noem dit punt Q.

(v) d(P , l) = d(P,Q) = $|PQ|$

VOORBEELD 1

Gegeven is lijn $l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ en de punten $P = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $T = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

a. Bereken afstand tussen punt P en punt T

b. Bereken de afstand tussen punt P en lijn l.

OPLOSSING 1

a. De afstand tussen punt P en punt Q is

$d(P,T) = \sqrt{(11-4)^2 + (6--1)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{49+25+4} = \sqrt{78}$

b. We volgen het stappenplan :

(i) Maak een vlak door P loodrecht op lijn l.

(ii) De normaalvector $n = r_l = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

(iii) Vlak $V: 5x + 2y - 2z = d \ en \ P = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

Invullen van punt P geeft : $5 \cdot 11 + 2 \cdot 6 - 2 \cdot 1 = 65 = d$

Dus V is $5x + 2y - 2z = 65$

(iv) $l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5\alpha \\ 2\alpha \\ 3-2\alpha \end{pmatrix}$. Vul dit in in de vergelijking van V :

$$5(1+5\alpha) + 2 \cdot 2\alpha - 2(3-2\alpha) = 65$$
$$5 + 25\alpha + 4\alpha - 6 + 4\alpha = 65$$
$$33\alpha = 66 \rightarrow \alpha = 2$$

Dus $Q = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

(v) De afstand tussen punt P en punt Q is

$d(P,l) = d(P,Q) = \sqrt{(11-11)^2 + (6-4)^2 + (1--1)^2} = \sqrt{0+4+4} = \sqrt{8}$

LES 2 : AFSTANDEN TUSSEN PUNT EN VLAK

Om de afstand tussen een punt en een vlak te bepalen is een stappenplan nodig :

STAPPENPLAN

De afstand van een punt P tot vlak V :

(i) Bepaal de vergelijking van een vlak V

(ii) Bepaal de lijn k die loodrecht staat op het vlak door punt P

(iii) Bereken de coördinaten van het snijpunt van n en V. Noem dit punt Q.

(iv) D(P,V) = d(P,Q) = $|PQ|$

VOORBEELD 1

Gegeven is een vlak V door (3,0,0) ; (0,5,0) en (0,0,7).

Bepaal de afstand van dit vlak tot het punt (1, 5 , 2).

OPLOSSING 1

(i) $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}+\frac{z}{7}=1\ (\times 3\cdot 5\cdot 7 \rightarrow \times 105)$

$35x+21y+15z=105$

(ii) Normaalvector $n=\begin{pmatrix}35\\21\\15\end{pmatrix}=r_k$ (=richtingsvector van k)

Dus $k:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}35\\21\\15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+35\alpha\\5+21\alpha\\2+15\alpha\end{pmatrix}$

(iii) Invullen van de coördinaten van lijn k in vlak V geeft :

$$35(1+35\alpha)+21(5+21\alpha)+15(2+15\alpha)=105$$
$$35+1225\alpha+110+441\alpha+30+225\alpha=105$$
$$1891\alpha+175=105$$
$$1891\alpha=-70 \rightarrow \alpha=-\frac{70}{1891}$$

De coördinaat kun je dan berekenen met $Q=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}-\frac{70}{1891}\begin{pmatrix}35\\21\\15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-35}{1891}\\ \frac{7985}{1891}\\ \frac{2732}{1891}\end{pmatrix}$

(iv) Nu je punt Q weet kun je de afstand PQ berekenen.