PARAGRAAF 7.3 : VOLLEDIGE INDUCTIE

LES 1 : DEELBAARHEID

VOORBEELD 1

In de wiskunde is bekend dat $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

a. Toon aan dat deze formule klopt voor $n = 1, n = 2$ en $n = 3$.

Als we in de wiskunde willen bewijzen of de bovenstaande formule voor alle getallen klopt, moeten we aantonen of deze formule ook waar is voor $n = p + 1$

b. Schrijf de formule op voor $n = p + 1$.
c. Toon aan of deze formule ook klopt voor $n = p + 1$

OPLOSSING 1

a. $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$ → Klopt !
$1 + 2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2+1) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3$ → Klopt !
$1 + 2 + 3 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (3+1) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$ → Klopt !

b. $1 + 2 + 3 + \cdots + p + (p+1) = \frac{1}{2}(p+1)(p+1+1) = \frac{1}{2}(p+1)(p+2)$

c.
$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + p + (p+1) &= \frac{1}{2}p(p+1) + (p+1) \\ &= (p+1)(\tfrac{1}{2}p + 1) \\ &= (p+1) \cdot \tfrac{1}{2} \cdot (p+2) = \tfrac{1}{2}(p+1)(p+2) \end{aligned}$$

Dit klopt dus klopt de formule voor alle getallen n !!!

OPMERKING

(1) Dit bewijs heet het bewijs van **volledige inductie**.
(2) Je had in dit geval ook beide formules kunnen uitschrijven om aan te tonen dat ze gelijk zijn :

$\frac{1}{2}p(p+1) + (p+1) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}p + p + 1 = \frac{1}{2}p^2 + 1\frac{1}{2}p + 1$

$\frac{1}{2}(p+1)(p+2) = \frac{1}{2}(p^2 + 3p + 2) = \frac{1}{2}p^2 + 1\frac{1}{2}p + 1$ → Gelijk dus klopt !!

STAPPENPLAN VOLLEDIGE INDUCTIE

Een bewijs met volledige inductie heeft de volgende structuur:

(1) Laat zien dat de bewering waar is voor de laagste n (Vaak n=0 of n=1).

(2) Schrijf de bewering op voor n = p en die welke je wil bewijzen (TB)

(3) Laat zien dat de bewering dan ook waar is voor p+1.

(4) Trek de conclusie dat de bewering waar is voor alle n vanaf een zekere n.

VOORBEELD 2

Toon aan dat de formule $7^n + 3^{n+1}$ altijd deelbaar is door 4 voor elk natuurlijk getal n.

OPLOSSING 2

(1) Vul $n = 0$ in $\rightarrow 7^0 + 3^{0+1} = 1 + 3 = 4$ → 4 is deelbaar door 4, dus klopt !!

(2) Je weet nu dat $\rightarrow 7^p + 3^{p+1}$ deelbaar is door 4.

Te bewijzen $\rightarrow 7^{p+1} + 3^{p+2}$ is deelbaar door 4.

(3) Vul $n = p + 1$ in $\rightarrow 7^{p+1} + 3^{p+1+1}$

$\rightarrow 7 \cdot 7^p + 3 \cdot 3^{p+1}$ { Splits de 1[e] term in 4 en 3 keer }

$\rightarrow 4 \cdot 7^p + 3 \cdot 7^p + 3 \cdot 3^{p+1}$

$\rightarrow 4 \cdot 7^p + 3 \cdot (7^p + 3^{p+1})$

Nu kun je tweeconclusies trekken :

1. De term $4 \cdot 7^p$ is altijd deelbaar door 4 { want 4 keer een getal is altijd deelbaar door 4 !! }

2. De term $3 \cdot (7^p + 3^{p+1})$ is deelbaar door 4, vanwege stap 2 { dat wist je al }

(4) Conclusie : Beide termen zijn deelbaar door 4, dus ook $7^{p+1} + 3^{p+1+1}$ is deelbaar door 4.

Bewijs geleverd (QED)

OPMERKING

Als het bewijs geleverd is, schrijven we vaak de afkorting :

QED = Quod et demonstrandum (het bewijs is geleverd)

LES 2 : DEELBAARHEID

VOORBEELD 1

Bewijs met volledige inductie dat $\sum_{k=1}^{n}(3+k)=\frac{1}{2}n(n+7)$

OPLOSSING 1

(1) Vul $n=1$ in $\rightarrow 3+1=\frac{1}{2}\cdot 1(1+7)=\frac{1}{2}\cdot 8=4$ → klopt !!

(2) Je weet nu dat $\rightarrow \sum_{k=1}^{p}(3+k)=\frac{1}{2}p(p+7)$

Te bewijzen $\rightarrow \sum_{k=1}^{p+1}(3+k)=\frac{1}{2}(p+1)(p+8)$

(3) Vul $n=p+1$ in $\rightarrow \sum_{k=1}^{p+1}(3+k)=$

$\rightarrow \sum_{k=1}^{p}(3+k)+(3+p+1)=$

$\rightarrow \frac{1}{2}p(p+7)+(p+4)=$

$\rightarrow \frac{1}{2}p^2+3\frac{1}{2}p+p+4=$

$\rightarrow \frac{1}{2}p^2+4\frac{1}{2}p+4=$

$\rightarrow \frac{1}{2}(p^2+9p+8)=$

$\rightarrow \frac{1}{2}(p+1)(p+8)$

(4) Het is bewezen (QED)