

PARAGRAAF 5.1 : HERHALEN VAN KANSEXPERIMENTEN

HERHALING

Hoe bereken je de kans als je een aantal keren achter elkaar een experiment doet ?

$P(\dots)$ = kans op één rijtje \times het aantal verschillende rijtjes

VOORBEELD 1

Jan maakt een ABCD proefwerk. Hij gokt 5 vragen. Bereken de kans dat :

- Hij geen enkele vraag goed gokt.
- Hij precies 3 vragen goed gokt.
- Hij minstens 4 vragen goed gokt.
- Hij minstens 1 vraag goed gokt.

OPLOSSING 1

$$\text{a. } P(\text{FFFFF}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^5 = 0,2373$$

$$\text{b. } P(\text{GGGFF}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \binom{5}{3} = 0,0879$$

- c. Minstens 4 vragen goed \rightarrow 4 goed of 5 goed

$$P(\text{GGGGF}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \binom{5}{4} = 0,014648$$

$$P(\text{GGGGG}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{4}\right)^5 = 0,000977$$

$$P(\text{GGGGF}) + P(\text{GGGGG}) = 0,014648 + 0,000977 = 0,0156$$

- d. Minstens 1 vraag goed \rightarrow 1 of 2 of 3 of 4 of 5 goed
 $\rightarrow 1 - P(0 \text{ goed})$

$$\begin{aligned} P(\text{minstens 1 goed}) &= 1 - P(\text{geen goed}) \\ &= 1 - P(\text{FFFFF}) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^5 = 1 - 0,2373 = 0,7627 \end{aligned}$$

VOORBEELD 2

In een vaas zitten 3 blauwe, 5 groene en 7 rode knikkers. Harrie pakt 3 knikkers. (Hij legt ze niet terug). Bereken de kans dat :

- a. Hij 2 groene en een blauwe pakt.
- b. Hij precies 1 rode pakt
- c. Hij precies 2 blauwe pakt.

Hans pakt ook een knikker uit de vaas. Hij stopt als hij een rode knikker pakt.

- d. Bereken de kans dat hij 4 keer een knikker pakt.

Frans pakt ook een knikker uit de vaas. Hij stopt als hij twee rode knikkers heeft.

- e. Bereken de kans dat hij 4 keer een knikker pakt.

OPLOSSING 2

a. $P(\text{GGB}) = \binom{3}{1} \times \frac{5}{15} \times \frac{4}{14} \times \frac{3}{13} = 0,0659$

b. $P(\text{RRR}) = \binom{3}{1} \times \frac{7}{15} \times \frac{8}{14} \times \frac{7}{13} = 0,4308$

c. $P(\text{BBB}) = \binom{3}{1} \times \frac{3}{15} \times \frac{2}{14} \times \frac{11}{13} = 0,0791$

d. $P(\text{RRRR}) = \binom{3}{0} \times \frac{8}{15} \times \frac{7}{14} \times \frac{6}{13} \times \frac{7}{12} = 0,0718$

$P(\text{RRRR}) = \binom{3}{1} \times \frac{7}{15} \times \frac{8}{14} \times \frac{7}{13} \times \frac{6}{12} = 0,1846$

PARAGRAAF 5.2 TREKKEN MET OF ZONDER TERUGLEGGEN

LES 1 : VASTE OF WISSELENDE KANS (MET OF ZONDER TERUGLEGGEN)

KANSEN INDELEN

Er zijn twee soorten kansen :

(1) Vaste kans (met terugleggen)

Wanneer

- Gebruik je als de kans op 1^e rode \neq kans op 2^e rode.
- Gebruik je als er vaste kans of percentage wordt gegeven. (=binomiale verdeling)
- $P(X = k) = \text{kans op één rijtje } \times \text{het aantal rijtjes} = p^k (1 - p)^{n-k} \cdot \binom{n}{k}$

(2) Wisselende kans (zonder terugleggen)

Wanneer

- Gebruik je als de kans op 1^e rode \neq kans op 2^e rode.
- $P(X = k) = \frac{\binom{()}{k} \binom{()}{n-k}}{\binom{()}{n}}$

VOORBEELD 1

Aan de olympische finale doen 3 Amerikanen, 2 Duitsers, 2 Nederlanders en 1 Fransman mee.

a. Is dit een vaste of wisselende kans?

Bereken de kans dat in de eerste 4 banen :

- b. 2 Nederlanders zwemmen
- c. Minstens 1 Amerikaan zwemt.

OPLOSSING 1

a. Wisselend, want $P(1^{\text{e}} \text{ Duits}) \neq P(2^{\text{e}} \text{ Duits})$

b. $P(\text{NNNN}) = \frac{\binom{2}{2} \binom{6}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{15}{70}$

c. $P(\text{minstens 1 Am}) = 1 - P(\text{geen Am}) = 1 - P(\text{AAAA}) = 1 - \frac{\binom{3}{0} \binom{5}{4}}{\binom{8}{4}} = \frac{65}{70}$

VOORBEELD 2

Willem doet roulette. Er zijn 37 nummers (0 t/m 36). Hij zet altijd in op getal 30. Hij speelt 8 keer.

a. Is dit een vaste of wisselende kans?

Bereken de kans dat

- b. Hij precies 2 keer wint.
c. Hij minstens 1 keer wint.

OPLOSSING 2

- a. Vast, want $P(1^e\ 30) = P(2^e\ 30)$
b. $P(30\ 30\ nnnnnn) = \binom{8}{2} \left(\frac{1}{37}\right)^2 \cdot \left(\frac{36}{37}\right)^6 = 0,0174$
c. $P(\text{minstens 1 keer } 30) = 1 - P(nnnnnnnn) = 1 - \left(\frac{36}{37}\right)^8 = 0,1968$

PARAGRAAF 5.3 VERWACHTINGSWAARDE

LES 1 VERWACHTINGSWAARDE

DEFINITIES : VERWACHTINGSWAARDE

- Verwachtingswaarde = { wat je verwacht } \approx { gemiddelde }
- Verwachtingswaarde = \sum (kans x waarde)
- Notatie : $E(\cdot)$

VOORBEELD 1

De cijfers in klas 3A zijn :

- Bereken het gemiddelde (gem=5,7)
- Bereken de verwachtingswaarde

Cijfer	Aantal
5	11
6	4
7	5
Totaal	20

OPLOSSING 1

a. $Gemiddelde = \frac{5 \times 11 + 6 \times 4 + 7 \times 5}{20} = 5,7.$

- b. (1) Bereken de kans (zie tabel)

(2) Bereken kans x waarde :

$$E(Cijfer) = 0,55 \times 5 + 0,20 \times 6 + 0,25 \times 7$$

$$E(Cijfer) = 5,7$$

Cijfer	Aantal	Kans
5	11	$\frac{11}{20} = 0,55$
6	4	$\frac{4}{20} = 0,20$
7	5	$\frac{5}{20} = 0,25$
Totaal	20	1

OPMERKING

Je ziet dus dat het gemiddelde en de verwachtingswaarde (ongeveer) hetzelfde zijn.

VOORBEELD 2

Fin en Hin spelen een spel. Fin pakt 3 kaarten uit een stapel. Voor iedere harten krijgt hij een euro. De inzet voor dit spel is 1 euro.

- Bereken de verwachte winst van dit spel voor Fin.
- Bereken de inzet als het spel "eerlijk is".

OPLOSSING 2

- Eerst de kansen berekenen :

$$P(0 \text{ Harten}) = P(\text{H H H}) = \frac{39}{52} \times \frac{38}{51} \times \frac{37}{50} = 0,4135$$

$$P(1 \text{ Harten}) = P(\text{H H H}) = \frac{13}{52} \times \frac{39}{51} \times \frac{38}{50} \times \binom{3}{1} = 0,4359$$

$$P(2 \text{ Harten}) = P(\text{H H H}) = \frac{13}{52} \times \frac{12}{51} \times \frac{39}{50} \times \binom{3}{2} = 0,1376$$

$$P(3 \text{ Harten}) = P(\text{H H H}) = \frac{13}{52} \times \frac{12}{51} \times \frac{11}{50} = 0,0129$$

We zetten dit in een tabel :

Harten	Uitbetaling	Kans
0	0	0,4135
1	1	0,4359
2	2	0,1376
3	3	0,0129

Som \approx 1

$$E(\text{Uitbetaling}) = 0,4135 \times 0 + 0,4359 \times 1 + 0,1376 \times 2 + 0,0129 \times 3 = 0,75$$

De inzet is 1 euro.

Dus Fin wint $0,75 - 1 = -0,25$ (dus 25 cent verlies per spel)

- Als het eerlijk is dan is de winst 0. Dus de inzet is dan $\text{€ } 1 - \text{€ } 0,25 = \text{€ } 0,75$.

OPMERKING

Je kunt ook direct de winst berekenen :

Harten	Uitbetaling	Winst	Kans
0	0	-1	0,4135
1	1	0	0,4359
2	2	1	0,1376
3	3	2	0,0129

$$E(\text{Winst voor Fin}) = 0,4135 \times -1 + 0,4359 \times 0 + 0,1376 \times 1 + 0,0129 \times 2 = -0,25$$

Dus Fin verliest € 0,25.

PARAGRAAF 5.4 : DE BINOMIALE VERDELING

LES 1 : BINOMPDF EN BINOMCDF

DEFINITIES BINOMIALE VERDELING

- Binomiale verdeling = { Een kansverdeling waar maar twee keuzes zijn }
{ Een wel-niet experiment }
- Binomiale verdeling gaat ALTIJD over VASTE kans / MET terugleggen.

BINOMIALE VERDELING OP DE GR

- Binomknop bij : distr (2nd Vars) > binompdf/cdf
- $n = \{ \text{Het aantal experimenten} \}$
- $p = \{ \text{de kans op succes} \}$
- $k = \{ \text{het aantal keren succes} \}$
- $P(X = k) = \text{binompdf}(n,p,k)$ { p = precies }
- $P(X \leq k) = \text{binomcdf}(n,p,k)$ { c = cumulatief }

VOORBEELD 1

Suzy maakt een vierkeuzeproefwerk met 10 vragen. Iedere vraag is één punt waard. Ze gokt alle vragen. Bereken de kans dat :

- a. Zij vier vragen goed gokt.
- b. Zij hoogstens 3 vragen goed gokt.
- c. Zij meer dan 5 vragen goed gokt.
- d. Zij tussen de 3 en de 7 scoort.

Trudy weet 3 vragen zeker en gokt de rest.

- e. Zij 6 punten haalt.
- f. Zij minstens een 7 haalt.

OPLOSSING 1

Definieer eerst de toevalsvariabele. Dat maakt het opschrijven een stuk makkelijker.

X = {aantal vragen goed gegokt}

a. $P(X = 4) = P(ggggffffff) = 0,25^4 \cdot 0,75^6 \cdot \binom{10}{4} = 0,1460$

Dit kun je ook uitrekenen met de knop binompdf :

n = { Het aantal experimenten } = 10

p = { de kans op succes } = 0,25

k = { het aantal keren succes } = 4

$$P(X = 4) = \text{binompdf}(10,0.25,4) = 0,1460$$

b. $P(X \leq 3) = \text{binomcdf}(10,0.25,3) = 0,7759$

c. $P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - \text{binomcdf}(10,0.25,5) = 0,0197$

d. $P(3 < X < 7) = P(4 \leq X \leq 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 3) =$
 $\text{binomcdf}(10,0.25,6) - \text{binomcdf}(10,0.25,3) = 0,9965 - 0,7759 = 0,2206$

e. Nu is n = 7 en p = 0,25 (je weet drie vragen zeker dus die gok je niet). Voor een 6 moet ze drie vragen goed gokken :

$$P(X = 3) = \text{binompdf}(7,0.25,3) = 0,1730$$

f. Voor een 7 moet ze minstens 4 vragen goed gokken

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - \text{binomcdf}(7,0.25,3) = 0,9294$$

LES 2 VOOR WELKE N MET BINOMPDF/CDF

VOORBEELD 1

Vincent maakt een driekeuzeproefwerk met n vragen. Iedere vraag is één punt waard. Ze gokt alle vragen. Uit hoeveel vragen moet het proefwerk bestaan als

- de kans dat zij 6 of meer vragen goed heeft groter is dan 0,90.
- de kans dat zij 8 of meer vragen goed heeft groter is dan 0,97.

OPLOSSING 1

- $X = \{\text{aantal vragen goed gegokt}\}$ met $N=n$ en $p=1/3$.

$$P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - \text{binomcdf}\left(n, \frac{1}{3}, 5\right) > 0,90$$

$$\text{GR : } Y_1 = 1 - \text{binomcdf}\left(X, \frac{1}{3}, 5\right)$$

X	Y ₁	
25	0,8881	te klein
26	0,9097	groot genoeg

Dus voor $n \geq 26$

- $X = \{\text{aantal vragen goed gegokt}\}$ met $N=n$ en $p=1/3$.

$$P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) = 1 - \text{binomcdf}\left(n, \frac{1}{3}, 7\right) > 0,97$$

$$\text{GR : } Y_1 = 1 - \text{binomcdf}\left(X, \frac{1}{3}, 7\right)$$

X	Y ₁	
38	0,9668	te klein
39	0,9735	groot genoeg

Dus voor $n \geq 39$