PARAGRAAF 5.1 : HERHALEN VAN KANSEXPERIMENTEN

HERHALING

Hoe bereken je de kans als je een aantal keren achter elkaar een experiment doet ?

P(…) = kans op één rijtje x het aantal verschillende rijtjes

VOORBEELD 1

Jan maakt een ABCD proefwerk. Hij gokt 5 vragen. Bereken de kans dat :

a. Hij geen enkele vraag goed gokt.

b. Hij precies 3 vragen goed gokt.

c. Hij minstens 4 vragen goed gokt.

d. Hij minstens 1 vraag goed gokt.

OPLOSSING 1

a. $P(FFFFF) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^5 = 0{,}2373$

b. $P(GGGFF) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \binom{5}{3} = 0{,}0879$

c. Minstens 4 vragen goed → 4 goed of 5 goed

$P(GGGGF) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \binom{5}{4} = 0{,}014648$

$P(GGGGG) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{4}\right)^5 = 0{,}000977$

$P(GGGGF) + P(GGGGG) = 0{,}014648 + 0{,}00977 = 0{,}0156$

d. Minstens 1 vraag goed → 1 of 2 of 3 of 4 of 5 goed

→ 1 – P(0 goed)

$$P(minstens\ 1\ goed) = 1 - P(geen\ goed)$$
$$= 1 - P(FFFFF) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^5 = 1 - 0{,}2373 = 0{,}7627$$

VOORBEELD 2

In een vaas zitten 3 blauwe, 5 groene en 7 rode knikkers. Harrie pakt 3 knikkers. (Hij legt ze niet terug). Bereken de kans dat :

a. Hij 2 groene en een blauwe pakt.

b. Hij precies 1 rode pakt

c. Hij precies 2 blauwe pakt.

Hans pakt ook een knikker uit de vaas. Hij stopt als hij een rode knikker pakt.

d. Bereken de kans dat hij 4 keer een knikker pakt.

Frans pakt ook een knikker uit de vaas. Hij stopt als hij twee rode knikkers heeft.

e. Bereken de kans dat hij 4 keer een knikker pakt.

OPLOSSING 2

a. $P(GGB) = \binom{3}{1}\times\frac{5}{15}\times\frac{4}{14}\times\frac{3}{13} = 0{,}0659$

b. $P(R\,\cancel{R}\,\cancel{R}) = \binom{3}{1}\times\frac{7}{15}\times\frac{8}{14}\times\frac{7}{13} = 0{,}4308$

c. $P(B\,B\,\cancel{B}) = \binom{3}{1}\times\frac{3}{15}\times\frac{2}{14}\times\frac{11}{13} = 0{,}0791$

d. $P(\cancel{R}\,\cancel{R}\,\cancel{R}\,\underline{R}) = \binom{3}{0}\times\frac{8}{15}\times\frac{7}{14}\times\frac{6}{13}\times\frac{7}{12} = 0{,}0718$

$P(R\,\cancel{R}\,\cancel{R}\,\underline{R}) = \binom{3}{1}\times\frac{7}{15}\times\frac{8}{14}\times\frac{7}{13}\times\frac{6}{12} = 0{,}1846$

PARAGRAAF 5.2 TREKKEN MET OF ZONDER TERUGLEGGEN

LES 1 : VASTE OF WISSELENDE KANS (MET OF ZONDER TERUGLEGGEN)

KANSEN INDELEN

Er zijn twee soorten kansen :

(1) Vaste kans (met terugleggen)

Wanneer

- Gebruik je als de kans op 1e rode ≠ kans op 2e rode.
- Gebruik je als er vaste kans of percentage wordt gegeven. (=binomiale verdeling)
- $P(X = k) = \text{kans op één rijtje} \times \text{het aantal rijtjes} = p^k(1-p)^{n-k} \cdot \binom{n}{k}$

(2) Wisselende kans (zonder terugleggen)

Wanneer

- Gebruik je als de kans op 1e rode ≠ kans op 2e rode.
- $P(X = k) = \dfrac{(\quad)(\quad)}{(\quad)}$

VOORBEELD 1

Aan de olympische finale doen 3 Amerikanen, 2 Duitsers, 2 Nederlanders en 1 Fransman mee.

a. Is dit een vaste of wisselende kans?

Bereken de kans dat in de eerste 4 banen :

b. 2 Nederlanders zwemmen

c. Minstens 1 Amerikaan zwemt.

OPLOSSING 1

a. Wisselend, want P(1e Duits) ≠ P(2e Duits)

b. P(NN~~NN~~)= $\frac{\binom{2}{2}\binom{6}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{15}{70}$

c. P(minstens 1 Am) = 1 – P(geen Am) = 1 – P(AAAA) = 1 - $\frac{\binom{3}{0}\binom{5}{4}}{\binom{8}{4}} = \frac{65}{70}$

VOORBEELD 2

Willem doet roulette. Er zijn 37 nummers (0 t/m 36). Hij zet altijd in op getal 30. Hij speelt 8 keer.

a. Is dit een vaste of wisselende kans?

Bereken de kans dat

b. Hij precies 2 keer wint.

c. Hij minstens 1 keer wint.

OPLOSSING 2

a. Vast, want P(1^e 30) = P(2^e 30)

b. $P(30\ 30\ nnnnnn) = \binom{8}{2}\left(\frac{1}{37}\right)^2 \cdot \left(\frac{36}{37}\right)^6 = 0{,}0174$

c. $P(minstens\ 1\ keer\ 30) = 1 - P(nnnnnnnn) = 1 - (\frac{36}{37})^8 = 0{,}1968$

PARAGRAAF 5.3 VERWACHTINGSWAARDE

LES 1 VERWACHTINGSWAARDE

DEFINITIES : VERWACHTINGSWAARDE

- Verwachtingswaarde = { wat je verwacht } ≈ { gemiddelde }
- Verwachtingswaarde = ∑ (kans x waarde)
- Notatie : E(..)

VOORBEELD 1

De cijfers in klas 3A zijn :

a. Bereken het gemiddelde (gem=5,7)

b. Bereken de verwachtingswaarde

Cijfer	Aantal
5	11
6	4
7	5
Totaal	**20**

OPLOSSING 1

a. $Gemiddelde = \frac{5\times11+6\times4+7\times5}{20} = 5{,}7.$

b. **(1)** Bereken de kans (zie tabel)

(2) Bereken kans x waarde :

$$E(Cijfer) = 0{,}55 \times 5 + 0{,}20 \times 6 + 0{,}25 \times 7$$
$$E(Cijfer) = 5{,}7$$

Cijfer	Aantal	Kans
5	11	$\frac{11}{20} = 0{,}55$
6	4	$\frac{4}{20} = 0{,}20$
7	5	$\frac{5}{20} = 0{,}25$
Totaal	20	1

OPMERKING

Je ziet dus dat het gemiddelde en de verwachtingswaarde (ongeveer) hetzelfde zijn.

VOORBEELD 2

Fin en Hin spelen een spel. Fin pakt 3 kaarten uit een stapel. Voor iedere harten krijgt hij een euro. De inzet voor dit spel is 1 euro.

a. Bereken de verwachte winst van dit spel voor Fin.

b. Bereken de inzet als het spel “eerlijk is”.

OPLOSSING 2

a. Eerst de kansen berekenen :

P(0 Harten) = P($\cancel{H}$ $\cancel{H}$ $\cancel{H}$) = $\frac{39}{52} \times \frac{38}{51} \times \frac{37}{50} = 0{,}4135$

P(1 Harten) = P(H $\cancel{H}$ $\cancel{H}$) = $\frac{13}{52} \times \frac{39}{51} \times \frac{38}{50} \times \binom{3}{1} = 0{,}4359$

P(2 Harten) = P(H H $\cancel{H}$) = $\frac{13}{52} \times \frac{12}{51} \times \frac{39}{50} \times \binom{3}{2} = 0{,}1376$

P(1 Harten) = P(H H H) = $\frac{13}{52} \times \frac{12}{51} \times \frac{11}{50} = 0{,}0129$

We zetten dit in een tabel :

Harten	Uitbetaling	Kans
0	0	0,4135
1	1	0,4359
2	2	0,1376
3	3	0,0129
	Som ≈	1

E(Uitbetaling) = 0,4135 x 0 + 0,4359 x 1 + 0,1376 x 2 + 0,0129 x 3 = 0,75

De inzet is 1 euro.

Dus Fin wint 0,75 – 1 = – 0,25 (dus 25 cent verlies per spel)

b. Als het eerlijk is dan is de winst 0. Dus de inzet is dan € 1 - € 0,25 = € 0,75.

OPMERKING

Je kunt ook direct de winst berekenen :

Harten	Uitbetaling	**Winst**	Kans
0	0	**-1**	0,4135
1	1	**0**	0,4359
2	2	**1**	0,1376
3	3	**2**	0,0129

E(Winst voor Fin) = 0,4135 x -1 + 0,4359 x 0 + 0,1376 x 1 + 0,0129 x 2 = -0,25

Dus Fin verliest € 0,25.

PARAGRAAF 5.4 : DE BINOMIALE VERDELING

LES 1 : BINOMPDF EN BINOMCDF

DEFINITIES BINOMIALE VERDELING

- Binomiale verdeling = { Een kansverdeling waar maar twee keuzes zijn }
  { Een wel-niet experiment }
- Binomiale verdeling gaat ALTIJD over VASTE kans / MET terugleggen.

BINOMIALE VERDELING OP DE GR

- Binomknop bij : distr (2nd Vars) > binompdf/cdf

- n = { Het aantal experimenten }
- p = { de kans op succes }
- k = { het aantal keren succes }

- P(X = k) = binompdf(n,p,k) { p = precies }
- P(X ≤ k) = binomcdf(n,p,k) { c = cumulatief }

VOORBEELD 1

Suzy maakt een vierkeuzeproefwerk met 10 vragen. Iedere vraag is één punt waard. Ze gokt alle vragen. Bereken de kans dat :

a. Zij vier vragen goed gokt.
b. Zij hoogstens 3 vragen goed gokt.
c. Zij meer dan 5 vragen goed gokt.
d. Zij tussen de 3 en de 7 scoort.

Trudy weet 3 vragen zeker en gokt de rest.

e. Zij 6 punten haalt.
f. Zij minstens een 7 haalt.

OPLOSSING 1

Definieer eerst de toevalsvariabele. Dat maakt het opschrijven een stuk makkelijker.

X = {aantal vragen goed gegokt}

a. $P(X = 4) = P(ggggffffff) = 0{,}25^4 \cdot 0{,}75^6 \cdot \binom{10}{4} = 0{,}1460$

Dit kun je ook uitrekenen met de knop binompdf :
n = { Het aantal experimenten } = 10
p = { de kans op succes } = 0,25
k = { het aantal keren succes } = 4

$P(X = 4) = binompdf(10{,}0.25{,}4) = 0{,}1460$

b. $P(X \leq 3) = binomcdf(10{,}0.25{,}3) = 0{,}7759$

c. $P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - binomcdf(10{,}0.25{,}5) = 0{,}0197$

d. $P(3 < X < 7) = P(4 \leq X \leq 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 3) =$
$binomcdf(10{,}0.25{,}6) - binomcdf(10{,}0.25{,}3) = 0{,}9965 - 0{,}7759 = 0{,}2206$

e. Nu is n = 7 en p = 0,25 (je weet drie vragen zeker dus die gok je niet). Voor een 6 moet ze drie vragen goed gokken :
$P(X = 3) = binompdf(7{,}0.25{,}3) = 0{,}1730$

f. Voor een 7 moet ze minstens 4 vragen goed gokken
$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - binomcdf(7{,}0.25{,}3) = 0{,}9294$

LES 2 VOOR WELKE N MET BINOMPDF/CDF

VOORBEELD 1

Vincent maakt een driekeuzeproefwerk met n vragen. Iedere vraag is één punt waard. Ze gokt alle vragen. Uit hoeveel vragen moet het proefwerk bestaan als

a. de kans dat zij 6 of meer vragen goed heeft groter is dan 0,90.

b. de kans dat zij 8 of meer vragen goed heeft groter is dan 0,97.

OPLOSSING 1

a. X = {aantal vragen goed gegokt} met N=n en p=$^1/_3$.

$P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - binomcdf\left(n, \frac{1}{3}, 5\right) > 0{,}90$

GR : $Y_1 = 1 - binomcdf\left(X, \frac{1}{3}, 5\right)$

X	Y_1	
25	0,8881	te klein
26	0,9097	groot genoeg

Dus voor n ≥ 26

b. X = {aantal vragen goed gegokt} met N=n en p=$^1/_3$.

$P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) = 1 - binomcdf\left(n, \frac{1}{3}, 7\right) > 0{,}97$

GR : $Y_1 = 1 - binomcdf\left(X, \frac{1}{3}, 7\right)$

X	Y1	
38	0,9668	te klein
39	0,9735	groot genoeg

Dus voor n ≥ 39