PARAGRAAF 3.2 : DETERMINANTEN

LES 1 : DETERMINANTEN

DEFINITIE DETERMINANT

- De **determinant** van de [2 x 2]-matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ is een getal met waarde det(A) = ad – bc.
- Notatie : $det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

VOORBEELD 1

$$det(A) = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 7 \times 0 - -3 \times -1 = -3$$

DEFINITIE DETERMINANT EN ONDERMATRIX

Om de **determinant** van een [3 x 3] matrix B uit te rekenen, moet je deze ontwikkelen naar een rij of een kolom.

Als je deze matrix bijvoorbeeld ontwikkelt naar de 1^e rij krijg je :

$$det(B) = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = b_{11} \times B_{11} - b_{12} \times B_{12} + b_{13} \times B_{13}$$

OPMERKING ONDERMATRIX

De matrices B_{11}, B_{12} en B_{13} heet een ondermatrix van B.

De **ondermatrix (B_{ij})** van de matrix B is de matrix die overblijft als je de i-de rij en de j-de kolom doorstreept.

VOORBEELD 2

Neem de matrix $B = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Bepaal de ondermatrices B_{12} en B_{23}

OPLOSSING 2

De $ondermatrix\ B_{12} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

De $ondermatrix\ B_{23} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

VOORBEELD 3

Bereken de determinant van de matrix $B = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

We gaan de matrix ontwikkelen naar de 1e rij. Je berekent dan eerst de ondermatrices :

(1) $B_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\rightarrow det(B_{11}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 0 \times 0 = 1$

(2) $B_{12} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\rightarrow det(B_{12}) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \times 1 - 0 \times -1 = -1$

(3) $B_{13} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\rightarrow det(B_{13}) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \times 0 - 1 \times -1 = 1$

De determinant van B kun je nu berekenen :

- $det(B) = b_{11} \times B_{11} - b_{12} \times B_{12} + b_{13} \times B_{13} = 7 \times 1 + 3 \times -1 - 3 \times 1 = 1$

OPMERKING

- Je kunt de matrix naar iedere rij en kolom ontwikkelen. Kies vaak de handigste rij / kolom (welke zal dat zijn?)
- Er is een trucje voor de plussen en minnen bij de determinant : $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

VOORBEELD 4

Bereken de determinant van de matrix B door hem te ontwikkelen naar de tweede kolom.

LES 2: REKENREGELS VOOR DETERMINANTEN

Een determinant is een getal, dus daar zijn ook rekenregels voor.

REKENREGELS EN EIGENSCHAPPEN VAN DETERMINANTEN

(1) Laat B een matrix zijn en B_1 dezelfde matrix waarbij één rij met factor α vermenigvuldigd is. Dan geldt det $(B_1) = \alpha \times \det(B)$

(2) Vegen van rijen heeft GEEN invloed op de waarde van de determinant.

(3) Laat B een matrix zijn en B_3 dezelfde matrix waarbij 2 rijen (of kolommen) van plaats wisselen. Dan geldt det $(B_3) = -1 \times \det(B)$

(4) $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$

(5) $\det(A^T) = \det(A)$

(6) det(A) = 0 → De kolommen zijn afhankelijk en de inverse bestaat niet.
Bij ieder ander getal zijn ze onafhankelijk en bestaat de inverse wel.

(7) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

VOORBEELDEN

Neem $B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ *en* $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Er geldt

$det(B) = 12 - 3 = 9$

$det(A) = 5 + 2 = 7$

(1) Stel $B_1 = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

$\det(B_1) = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 48 - 12 = 36 = 4 \times \det(B)$

(2) Stel $B_2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad (\mathrm{R1} = \mathrm{R1} - \mathrm{R2})$

$\det(B_2) = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 1 = 9 = \det(B)$

(3) $\det(B_3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 12 = -9 = -1 \times 9 = -1 \times \det(B)$

(4) $AB = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 15 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$\det(AB) = \begin{vmatrix} 27 & 15 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 108 - 45 = 63 = 7 \times 9 = \det(A) \times \det(B)$

(5) $A^T = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$det(A^T) = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 - -2 = 7 = \det(A)$

(6) $\det(C) = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \times 4 - 2 \times 6 = 0$ $\quad \rightarrow Afhankelijk$

$(Klopt\ want\ kolom\ 2 = 2 \times kolom\ 1)$

(7) $det\ (A) \times det\ (A^{-1}) = det\ (A \times A^{-1}) = det\ (I) = 1$

$det\ (A) \times det\ (A^{-1}) = 1$

$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

PARAGRAAF 3.3 : DE REGEL VAN CRAMER (INVERSE MET DETERMINANTEN)

De inverse van een matrix A is ook te bepalen m.b.v. de formule

$$A^{-1} = \frac{(-1)^{i+j}\det(B_{ji})}{\det(A)}$$

STAPPENPLAN VOOR DE INVERSE MET DE REGEL VAN CRAMER :

(1) Bereken $det(A)$

(2) Maak matrix B met $b_{ij} = \det(A_{ij})$

(3) Neem B^T.

(4) Verdeel de plussen en minnen volgens het schaakbordpatroon. (matrix D)

(5) Deel de ontstane matrix door $det(A)$. Zo ontstaat A^{-1}.

VOORBEELD

(1) Neem de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ en $det(A) = 16$

(2) Dan is bijv. $minor\ B_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $en\ \det(B_{12}) = 4.$

Als je alle deelmatrices uitrekent ontstaat de matrix $B = \begin{pmatrix} 16 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(3) $B^T = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

(4) $C = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ (schaakbordpatroon)

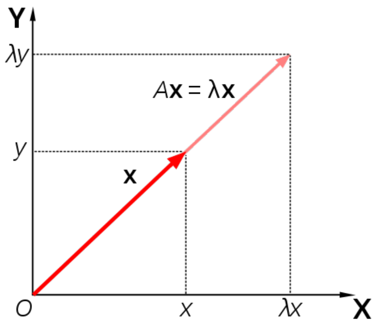
(5) $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \times C = \frac{1}{16} \times \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{16} & -\frac{3}{16} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

PARAGRAAF 3.5 : EIGENWAARDEN EN EIGENVECTOREN

DEFINITIE EIGENWAARDE EN EIGENVECTOR

Neem de matrix A en een getal λ en $\underline{x} \neq \underline{0}$.

Als voor de vector x geldt dat $Ax = \lambda x$ dan heet x de **eigenvector** met λ de bijbehorende **eigenwaarde**.



VOORBEELD

Neem $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ en $x = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Dan is $Ax = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \end{pmatrix} = 2 \times \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$

Dus de vector x is eigenvector van de matrix A met eigenwaarde $\lambda = 2$.

EIGENWAARDEN EN EIGENVECTOREN BEREKENEN

Om de eigenwaarden en eigenvectoren te berekenen gebruik je

(1) Ax = λx
Ax - λIx = 0
(A – λI)x = 0

(2) Omdat $\underline{x} \neq \underline{0}$ moet er gelden dat det(A – λI) = 0

ALGORITME VOOR EIGENWAARDEN EN EIGENVECTOREN BEREKENEN

(1) Bepaal de matrix ($A - \lambda I$) en bereken de determinant van A – λI.

(2) Bepaal een makkelijke waarde en bereken de andere waarden m.b.v. een staartdeling.

(3) Bepaal bij iedere eigenwaarde de eigenvector.

VOORBEELD EIGENWAARDE EN EIGENVECTOREN BEREKENEN

Neem $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}$. Bepaal alle eigenwaarden en eigenvectoren.

OPLOSSING

(1) Bepaal de matrix A – λI en bereken de determinant :

$$\det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & 9-\lambda \end{bmatrix}$$

Ontwikkelen naar de 1e rij geeft :

$$(2-\lambda)\left[(3-\lambda)(9-\lambda) - 16\right] = 22 - 35\lambda + 14\lambda^2 - \lambda^3 = 0$$

(2) Bepaal een makkelijke waarde en los de vergelijking op.

De waarde λ = 1 is een oplossing, en dan een staartdeling uitvoeren geeft de andere oplossingen :

$$(-\lambda^3 + 14\lambda^2 - 35\lambda + 22) : (\lambda - 1) = -\lambda^2 + 13\lambda - 22$$

$$-\lambda^3 + 14\lambda^2 - 35\lambda + 22 = 0$$
$$(\lambda - 1)(-\lambda^2 + 13\lambda - 22) = 0$$
$$\lambda - 1 = 0 \quad v \quad -\lambda^2 + 13\lambda - 22 = 0$$
$$\lambda - 1 = 0 \quad v \quad \lambda^2 - 13\lambda + 22 = 0$$
$$\lambda = 1 \quad v \quad (\lambda - 11)(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda = 1 \quad v \quad \lambda = 11 \quad v \ \lambda = 2$$

(3) Bepaal bij iedere eigenwaarde de eigenvector

1) $\lambda = 11 : (A - 11I)x = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} -9a \\ -8b + 4c \\ 4b - 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a = 0 \\ c = 2b \\ c = 2b \end{pmatrix}$

Dus een eigenvector is $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (of een veelvoud daarvan)

2) $\lambda = 1 : (A - 1I)x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ 2b + 4c \\ 4b + 8c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a = 0 \\ b = -2c \\ b = -2c \end{pmatrix}$

Dus een eigenvector is $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (of een veelvoud daarvan)

3) $\lambda = 2 : (A - 1I)x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ b + 4c \\ 4b + 7c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a = 0 \\ b = -4c \\ b = -\frac{7}{4}c \end{pmatrix}$

Dus een eigenvector is $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (of een veelvoud daarvan)

SAMENGEVAT

Er zijn drie eigenwaarden met 3 bijbehorende eigenvectoren :

1) $\lambda = 11$ $\qquad x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2) $\lambda = 1$ $\qquad x = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) $\lambda = 2$ $\qquad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

OPMERKINGEN

- Vegen van rijen verandert de eigenwaarden (NOOIT doen)
- Eigenwaarden (λ) kunnen 0 zijn, eigenvectoren NOOIT.