PARAGRAAF 2.2 : REKENREGELS VOOR MATRICES

LES 1 : WAT IS EEN MATRIX EN HOE KUN JE ERMEE REKENEN

DEFINITIES

(1) Matrix = { Tabel tussen ronde haakjes }
(2) [m x n] matrix = { Matrix met m rijen en n kolommen }
(3) Vierkante matrix = { Matrix met evenveel rijen als kolommen }
(4) A_{ij} = { element in de i-de rij en de j-de kolom }
(5) A^T = { de getransponeerde matrix van de matrix A } =
= { De rijen en kolommen omdraaien }

VOORBEELD 1

Gegeven zijn de matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ en $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Bereken indien mogelijk :

a. 2B

b. A + 2B

c. A × B

d. B × A

e. A^T

f. B × A^T

OPLOSSING 1

a. $2B = 2 \times \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

b. $A + 2B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + 2 \times \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ → kan niet

c. $A \times B = [2 \times 3] \times [3 \times 2] = [2 \times 2] - matrix$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 5 + 0 \times 0 + 2 \times 1 & 3 \times 0 + 0 \times 2 + 2 \times 3 \\ 1 \times 5 + 2 \times 0 + 1 \times 1 & 1 \times 0 + 2 \times 2 + 1 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

d. $B \times A = [3 \times 2] \times [2 \times 3] = [3 \times 3] - matrix$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 10 \\ 2 & 4 & 2 \\ 6 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

De volgorde is bij vermenigvuldigen dus enorm van belang.

e. $A^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

f. $B \times A^T = [3 \times 2] \times [3 \times 2] = kan\ niet$

PARAGRAAF 2.5 :INVERSE EN ONAFHANKELIJKHEID

LES 1 : DE INVERSE VAN EEN MATRIX

DEFINITIES

(1) A^{-1} = { De inverse van matrix A }

(2) I = { De eenheidsmatrix, met op de hoofddiagonaal énen en de rest is nul }

(3) Er geldt : $A^{-1} \times A = I$

(4) Los het stelsel $Ax = b$ op.
Dan is de oplossing x van dit stelsel dat $x = A^{-1}b$

(5) Probleem : A^{-1} bestaat niet altijd

ALGORITME VOOR EEN INVERSE VAN MATRIX A TE BEPALEN :

(1) Schrijf de matrix A en I achter elkaar (A | I) op.

(2) Maak door vegen van de matrix A de matrix I. De achterste matrix I verandert dan in A^{-1}.

VOORBEELD 1

Bepaal de inverse van :

A= $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

OPLOSSING 1

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-R_1+R_3]{-R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-3R_2+R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-3R_3+R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

De inverse is dan A^{-1} = $\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

VOORBEELD 2.

Los het volgende stelsel op

$x + 3y + 3z = 2$

$x + 4y + 3z = 3$

$x + 3y + 4z = 1$

OPLOSSING 2.

(1) Dit stelsel is van de vorm $Ax = b$ met

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2) Je weet dat $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (zie voorbeeld 1)

(3) De oplossing is nu $x = A^{-1}b$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

OPMERKING

- Als de rijen afhankelijk zijn, bestaat de inverse niet.
- De inverse bestaat zeker niet altijd !!!!

PARAGRAAF 2.8 : LU DECOMPOSITIE (LES 1)

LES 1 : LU DECOMPOSITIE

DEFINITIES

(1) L = { Lowermatrix } = { Onder de diagonaal alleen maar nullen }
(2) U = { Uppermatrix } = { Boven de diagonaal alleen maar nullen } = { Echelon }
(3) LU-decompositie van matrix A is de matrix A schrijven als A = L•U

STAPPENPLAN LU DECOMPOSITIE

(1) Maak een L matrix met op de diagonaal 1-en en boven deze lijn alleen nullen. Onder de diagonaal vul je nog niks in.
(2) Maak van de matrix A een U matrix (echelon) door te vegen. Schrijf op de lege plaatsen bij de L matrix hoe vaak je een rij ERAF hebt gehaald (erbij levert dus een negatief getal op).
(3) Je kunt controleren of $A = L \cdot U$

VOORBEELD 1

Gegeven is de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 12 \\ 0 & 2 & -10 \end{pmatrix}$.

Maak van deze matrix een LU decompositie.

OPLOSSING 1

(1) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ .. & 1 & 0 \\ .. & .. & 1 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 12 \\ 0 & 2 & -10 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \\ R2 - 2R1 \\ R3 - 0R1 \end{vmatrix}$ $\qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & .. & 1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & -10 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \\ \\ R3 + 2R2 \end{vmatrix}$ $\qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = U$ $\qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

(3) Controle : $L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 12 \\ 0 & 2 & -10 \end{pmatrix} = A$

PARAGRAAF 2.8 : DRIEHOEKSMATRICES

LES 1 : STELSEL OPLOSSEN MET LU DECOMPOSITIE

VOORBEELD 1

Gegeven is het stelsel $Ax = b$ met $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 12 \\ 0 & 2 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$

Los dit stelsel op m.b.v. LU decompositie.

OPLOSSING 1

We willen het stelsel $Ax = b$ oplossen en we weten ook dat $A = LU$.

Dit betekent dat $LUx = b$

(1) Noem $y = Ux$. Deze matrix is dan $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

(2) Los het stelsel $Ly = b$ op. Dit geeft :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Los dit op via de echelon methode :

- $y_1 = 2$
- $2 \cdot 2 + 1y_2 = 8 \quad dus \quad y_2 = 4$
- $-2 \cdot 4 + 1 \cdot y_3 = -6 \quad dus \quad y_3 = 2$

(3) Los nu het stelsel $Ux = y$ op. Dit geeft :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Los dit op via de echelon methode :

- $2x_3 = 2 \quad dus \quad x_3 = 1$
- $-1x_2 + 6 \cdot 1 = 4 \quad dus \quad x_2 = 2$
- $1x_1 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 2 \quad dus \quad x_1 = 3$

CONTROLE

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 12 \\ 0 & 2 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

(klopt !!!)