PARAGRAAF 2.1 : HET BINOMIUM VAN NEWTON

LES 1 DRIEHOEK VAN PASCAL

VOORBEELD 1

Willem gooit met 5 dobbelstenen. Op deze dobbelstenen staan de letters A t/m F. Bereken op hoeveel manieren hij

a. Hij precies twee B's kan gooien.

b. Hij precies 3 F-en kan gooien

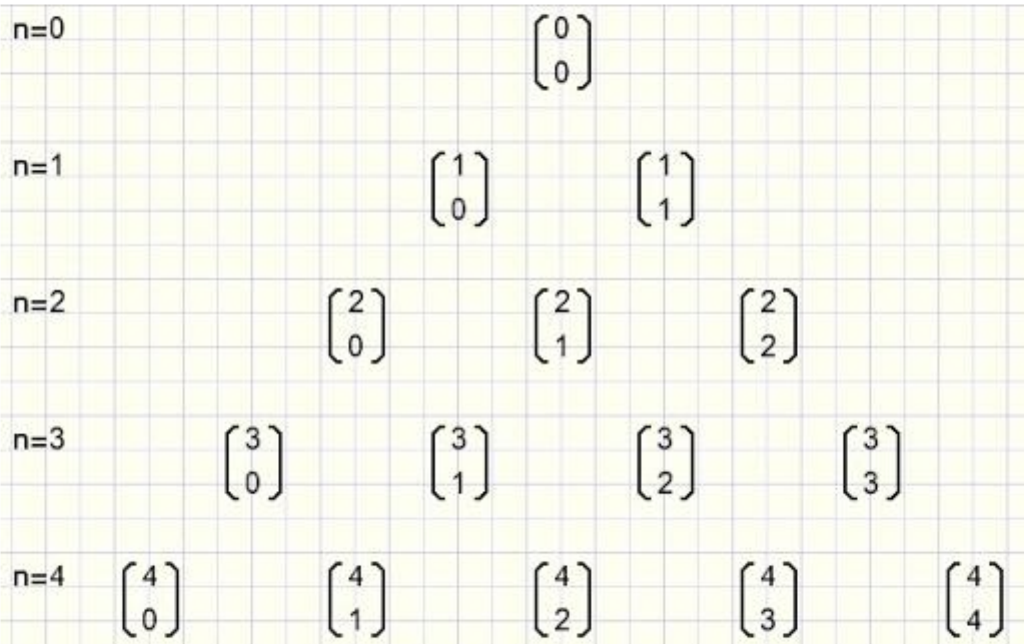
OPLOSSING 1

a. BBNNNN = $\binom{6}{2} = 15$ mogelijkheden

b. FFFNNN = $\binom{6}{3} = 20$ mogelijkheden

DRIEHOEK VAN PASCAL

Je kunt dit ook uitrekenen met behulp van de driehoek van Pascal.



Plaats 0 1 2 3 4

Als je de getallen uitrekent krijg je :

rij 0					1				
rij 1				1		1			
rij 2			1		2		1		
rij 3		1		3		3		1	
rij 4	1		4		6		4		1

VOORBEELD 2

Gegeven is de formule $(x+y)^4$

a. Hoeveel termen zijn er met 3 x-en ?

b. Hoeveel termen zijn er met 2 x-en ?

c. Schrijf de formule $(x + y)^4$ helemaal uit.

OPLOSSING 2

a. $(x + y)^4 = (x + y)\ (x + y)\ (x + y)\ (x + y)$ = alleen 3 x-en .. =

= xxxy + xxyx + xyxx + yxxx = $\binom{4}{3} x^3y^1 = 4x^3y$ (4 termen dus)

Dat is in de driehoek van Pascal het getal op de 4e rij en plaats 1

b. $(x + y)^4 = \binom{4}{2} x^2y^2 = 6x^2y^2$ (6 termen dus)

Dat is in de driehoek van Pascal het getal op de 4e rij en plaats 2

c. $(x+y)^4 = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}xy^3 + \binom{4}{4}y^4$

$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

OPMERKING

Je kunt deze termen sneller berekenen door het binomium van Newton toe te passen :

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k a^{n-k} = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}a^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 + \cdots \binom{n}{n}x^0a^n$$

Of heel kort

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot a^k$$

LES 2 SIGMA NOTATIE EN HET BINOMIUM VAN NEWTON

BINOMIUM VAN NEWTON

- $(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k a^{n-k} = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} a^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} a^2 + \cdots \binom{n}{n} x^0 a^n$
- De termen $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}$ ... heten de binomiaalcoëfficiënten bij respectievelijk $x^n, x^{n-1}a, x^{n-2}a^2$ ...

VOORBEELD 1

a. Herleid $(x+2)^3$

b. Geef de coëfficiënt van de vijfde term van dan de herleiding van $(2p-3q)^7$

OPLOSSING 1

a. $(x+2)^3 = \binom{3}{0} \cdot x^3 \cdot 2^0 + \binom{3}{1} \cdot x^{3-1} \cdot 2^1 + \binom{3}{2} \cdot x^{3-2} \cdot 2^2 + \binom{3}{3} \cdot x^{3-3} \cdot 2^3$

$= 1 \cdot x^3 \cdot 1 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x^1 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 8$

$= x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

b. k = 4 geeft $\binom{7}{4} \cdot (2q)^3 \cdot (-3q)^4 = 22680p^3q^4$ → 22680

LES 3 MULTINOMIAALCOËFFICIËNTEN

MULTINOMIAALCOËFFICIËNTEN

- Soms heb je meer dan 2 letters in de haakejs staan. Om de coëfficiënten van deze termen uit te rekenen, maak je gebruik van multinomiaalcoëfficiënten.
- In de herleiding van $(a + b + c)^9$ is de multinomiaalcoëfficiënt van $a^5\ b^3\ c$ gelijk aan: $\binom{9}{5,3,1} = \frac{9!}{5!\cdot 3!\cdot 1!}$

VOORBEELD 1

Gegeven is de formule $(3a - b + c)^{10}$.

a. Bereken de coëfficiënt van a^8b^2

b. Bereken de coëfficiënt van $a^3b^5c^2$

OPLOSSING 1

a. $\binom{10}{8,2,0} \cdot (3a)^8 \cdot (-b)^2 \cdot c^0 = \frac{10!}{8!\cdot 2!\cdot 0!} \cdot 3^8 \cdot a^8 \cdot b^2 = 45 \cdot 6561 \cdot a^8b^2 = 295245a^8b^2$

b. $\binom{10}{3,5,2} \cdot (3a)^3 \cdot (-b)^5 \cdot c^2 = \frac{10!}{3!\cdot 5!\cdot 2!} \cdot 27a^3 \cdot -b^5 \cdot c^2 = -68040a^3b^5c^2$

Dus de coëfficiënt is –68040

PARAGRAAF 2.2 : RECURSIEVE FORMULES

LES 1 WAT IS EEN RECURSIEVE FORMULE

DEFINITIES : WAT IS EEN RIJ

Gegeven is de rij u = { 5,10,20,40 }.Voor deze rij geldt :

(1) Deze rij bestaat 4 termen (=getallen)

(2) $u_0 = 5$, $u_1 = 10$, $u_2 = 20$ en $u_3 = 40$ (dit is de vierde term!!)

(3) Let op : 1^e term = u_0 2^e term = u_1 etc.

(4) Je kunt deze rij eenvoudig op de GR berekenen door in te tikken

(1) 5 enter

(2) Ans · 2 en dan zo vaak als nodig op enter drukken

DEFINITIES : RECURSIEVERGELIJKING

(1) Recursievergelijking = { Een formule om de rij te beschrijven }

(2) Een formule van deze rij is :

Volgende = 2·Vorige en startwaarde = 5

(3) De **recursievergelijking is dan**

$u_n = 2 \cdot u_{n-1}$ en $u_0 = 5$

VOORBEELD 1

Gegeven is een rij met startwaarde 7 en iedere keer keer 2 en dan min 4 te doen.

a. Bereken de vierde term

b. Stel een recursievergelijking op.

c. Bereken u(3)

OPLOSSING 1

a. 7 enter → Ans·2 -4 → u(3) = 28

b. $u_n = 2 \bullet u_{n-1} - 4$

$u_0 = 7$

c.

$n = 1 \rightarrow \quad u_1 = 2 \cdot u_0 - 4 = 2 \cdot 7 - 4 = 10$

$n = 2 \rightarrow \quad u_2 = 2 \cdot u_1 - 4 = 2 \cdot 10 - 4 = 16$

$n = 3 \rightarrow \quad u_3 = 2 \cdot u_2 - 4 = 2 \cdot 16 - 4 = 28$

LES 2 EEN DIRECTE FORMULE EN DE GR

DEFINITIES : DIRECTE FORMULE

(1) Directe formule = { een formule waarmee je meteen u(30) kunt berekenen }

(2) In de directe formule staat ALLEEN de letter n { dus geen u(n-1) }

(3) Voorbeeld van een directe formule is $u(n) = 5 \cdot 2^{n-1}$.
Deze bevat geen u(n-1) vandaar een directe formule.
Je kunt nu direct bijv. u(11) uitrekenen : $u(11) = 5 \cdot 2^{11-1} = 5120$

VOORBEELD 1

Van een rij is de formule $u_n = n^2 - 3n$.

a. Is dit een recursievergelijking of een directe formule ? Waarom ?

b. Bereken u(6).

Van een andere rij is de formule $u_n = n^2 + u_{n-1}$ en $u_0 = 8$

c. Bereken u(20).

d. Bereken vanaf welke term de formule groter is dan 10000.

OPLOSSING 1

a. Deze bevat geen u(n-1) vandaar een directe formule.

b. $u_6 = 6^2 - 3 \cdot 6 = 18$

c. Dit moet je op de GR doen :

(1) Mode : $Func \rightarrow Seq$

(2) Y = : nMin = 0
: $u(n) = n^2 + u(n-1)$ { de u boven de 7 ; de n is de x-knop }
: u(nMin) = 8

(3) Tblset : TblStart = 20 en ΔTbl = 1 { Table begint bij 20 en stappen van 1 }

(4) Table : u(20) = 2878

d. Gebruik weer de Table. Je ziet dan

n	u_n
30	9463
31	10424

Dus bij n = 31 dus de 32^e term.

PARAGRAAF 2.3 : REKENKUNDIGE RIJ

LES 1 : REKENKUNDIGE RIJ

DEFINITIE

Er zijn twee soorten rijen die vaak terugkomen

1. Rekenkundige rij = { Iedere keer een getal erbij tellen }

2. Meetkundige rij = { Iedere keer met een getal vermenigvuldigen }

REKENKUNDIGE RIJ

Voor de rekenkundige rij gelden een aantal formules

1. De recursievergelijking : $u(n) = u(n-1) + v$ waarbij v een getal is.

2. De directe formule : $u(n) = u(0) + n \cdot v$

3. De somformule : S(n) $= \sum_{i=0}^{n} u(n) = \frac{1}{2}(n+1)(u_0 + u_n)$

DEFINITIE SOMRIJ

- $S_n = \{\, Som\ van\ de\ eerste\ (n+1)\ termen\ van\ de\ rij\ u \,\} = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$
- $S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

VOORBEELD 1

Gegeven is de rij u = { 9,13,17,….}

a. Stel een recursievergelijking op en bereken u_4.

b. Stel de directe formule op en bereken u_{58}.

c. Bereken de som van de eerste 15 termen.

OPLOSSING 1

a. u(n) = u(n-1) + 4 en u(0) = 9

De GR

(1) nMin = 0

u(n) = u(n-1) + 4

u(nMin) = 9

(2) Table : u(4) = 25

b. u(n) = 9 + n·4 = 4n + 9 → u(58) = 4·58 + 9 = 241

c. s_{14} = ½ (14+1)(9 + 65) = 555

VOORBEELD 2

a. Bereken $\sum_{i=0}^{2} 3k + 2$

b. Bereken $\sum_{i=0}^{8} 3k + 2$

OPLOSSING 2

a. $\sum_{i=0}^{2} 3k + 2 = (3 \cdot 0 + 2) + (3 \cdot 0 + 2) + (3 \cdot 0 + 2) = 2 + 5 + 8 = 15$

b. Dit is een rekenkundige rij, want $u_0 = 2, u_1 = 5\ en\ u_2 = 8$ (Controleer!!)

$u_0 = 3 \cdot 8 + 2 = 26$

$u_8 = 3 \cdot 8 + 2 = 26.$

Dus de som is $S_8 = \frac{1}{2}(n + 1)(u_0 + u_n) = \frac{1}{2}(8 + 1)(2 + 26) = 126$

OPMERKING

Als de rij niet begint met u(0) , maar met bijv u(3), dan wordt de directe formule :
u(n) = u(0) + v · (n-3).

LES 2 : FORMULE OPSTELLEN MET TWEE TERMEN

VOORBEELD 1

Gegeven zijn de termen $u_3 = 256$ en $u_7 = 625$. Bepaal de recursievergelijking als dit een rekenkundige rij is.

OPLOSSING 1

(1) In vier stappen van 256 naar 625, dus :

$4v = 625 - 256 = 369$

$v = \frac{369}{4} = 92{,}25$

(2) Startwaarde (u_0) is 3 stappen terug van u_3 , dus

$u_0 = 256 - 3 \times 92{,}25 = -20{,}75$

(3) Recursievergelijking

$u_n = u_{n-1} + 92{,}25$ en $u_0 = -20{,}75$

PARAGRAAF 2.4 : MEETKUNDIGE RIJ

LES 1 : MEETKUNDIGE RIJ

DEFINITIE MEETKUNDIGE RIJ

Meetkundige rij = { Iedere keer met een getal vermenigvuldigen }

Voor de meetkundige rij gelden een aantal formules

1. De recursievergelijking : u(n) = r·u(n-1) , waarbij r een getal is.
2. De directe formule : u(n) = u(0) · r^n.
3. De somformule : S(n) = $\sum_{i=0}^{n} u(n) = u(0) \cdot \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$

VOORBEELD 1

Gegeven is de rij u = { 3,6,12,….}

a. Stel een recursievergelijking op en bereken u_4.

b. Stel de directe formule op en bereken u_{10}.

c. Bereken de som van de eerste 15 termen.

OPLOSSING 1

a. u(n) = 2·u(n-1) en u(0) = 3

De GR

(1) nMin = 0

u(n) = 2·u(n-1)

u(nMin) = 3

(2) Table : u(4) = 48

b. u(n) = $u_0 \cdot r^n = 3 \cdot 2^n$

u(10) = $3 \cdot 2^{10}$ = 3072

c. $S_{14} = u(0) \cdot \frac{1-r^{n+1}}{1-r} = 3 \cdot \frac{1-2^{14+1}}{1-2} = 98301$

OPMERKING

- Als de rij niet begint met u(0) , maar met bijv u(3), dan wordt de directe formule u(n) = u(0) · r^{n-3}
- Als je oneindig veel termen optelt en -1 < r < 1. Dan is de som S gelijk aan

$$S = u(0) \cdot \frac{1-r^{\infty+1}}{1-r} = u(0) \cdot \frac{1-0}{1-r} = \frac{u(0)}{1-r}$$

LES 2 : FORMULE OPSTELLEN MET TWEE TERMEN

VOORBEELD 1

Gegeven zijn de termen $u_3 = 256$ en $u_7 = 625$. Bepaal de recursievergelijking als dit een meetkundige rij is.

OPLOSSING 1

(1) In vier stappen van 256 naar 625, dus :

$$256v^4 = 625$$

$$v^4 = \frac{625}{256} \rightarrow v = \sqrt[4]{\frac{625}{256}} = 1{,}25$$

(2) Startwaarde (u_0) is 3 stappen terug van u_3 , dus

$$u_0 = 256 : 1{,}25^3 = 131{,}072$$

(3) Recursievergelijking

$u_n = 1{,}25u_{n-1}$ en $u_0 = 131{,}072$