PARAGRAAF 16.1 : LINEAIRE COMPLEXE FUNCTIES

LES 1 HET COMPLEXE VLAK

VOORBEELD 1

Gegeven is de formule $f(z) = (1+i) \cdot z$.

a. Bereken het beeld van 3 + i.

b. Bereken het origineel van 3 + i.

Het domein van de functie $f(z)$ is het vlak V met $2 \leq Re(z) \leq 3$ en $1 \leq Im(z) \leq 2$

c. Teken het domein.

d. Teken het beeld (of bepaal het bereik).

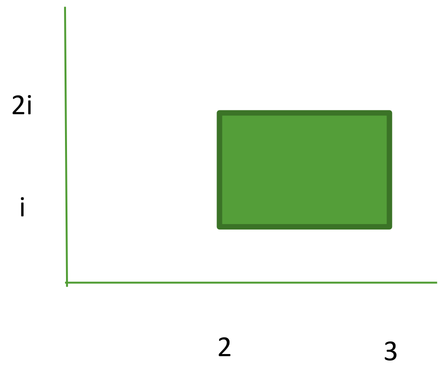
OPLOSSING 1

a. $f(3+i) = (1+i) \cdot (3+i) = 3 + 4i + i^2 = 2 + 4i$

b. $3 + i = (1+i) \cdot z$

$z = \frac{3+i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{3-2i-i^2}{1-i^2} = \frac{4-2i}{2} = 2 - i$

c.



d. Je kunt dit op twee manieren doen :

1. **Met de hoekpuntmethode**

   Voor de functie $f(z)$ wordt ieder complex getal dat wordt ingevuld vermenigvuldigd met $1+i$. We gaan alle nieuwe hoekpunten berekenen :

(1) **Hoekpunt** $\boldsymbol{A} = (\mathbf{2}, \mathbf{1})$

$f(A') = (1+i) \cdot (2+i) = 2 + 3i + i^2 = 1 + 3i$

(2) ***Hoekpunt*** $\boldsymbol{B} = (\mathbf{2}, \mathbf{1})$

$f(B') = (1+i) \cdot (3+i) = 3 + 4i + i^2 = 2 + 4i$

(3) ***Hoekpunt*** $\boldsymbol{C} = (\mathbf{2}, \mathbf{1})$

$f(C') = (1+i) \cdot (3+2i) = 3 + 5i + 2i^2 = 1 + 5i$

(4) ***Hoekpunt*** $\boldsymbol{D} = (\mathbf{2}, \mathbf{1})$

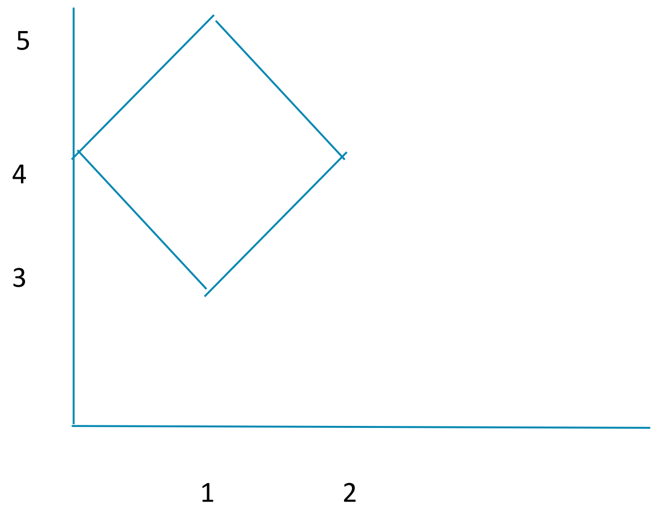
$f(D') = (1+i) \cdot (2+2i) = 2 + 4i + 2i^2 = 0 + 4i$

2. Draaihoek en vermenigvuldiging (De moivre).

$Arg(1+i) \;=\;$ 45 en $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$.

Je kunt nu ieder hoekpunt 45 graden draaien en de straal van ieder hoekpunt $\sqrt{2}$ te vermenigvuldigen.

Voor beide gevallen geldt dat de blauwe rechthoek het bereik is.



OPMERKING

De tweede methode werkt beter als je een gebied hebt dat een deel van een cirkel is, zoals bijvoorbeeld $3 \leq |z| \leq 5 \;\; en \;\; 0 \; \leq \mathrm{Arg}(z) \leq \frac{1}{4}\pi$.

VOORBEELD 2

Gegeven is de formule f(z) = 4 + 2i - z met domein $2 \leq Re(z) \leq 3$ en $1 \leq Im(z) \leq 2$.

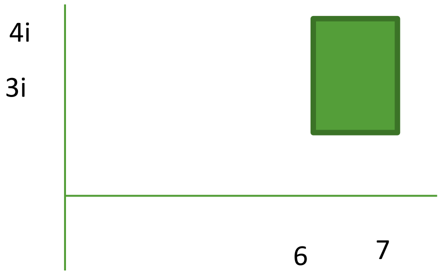
a. Teken het bereik van deze functie in een nieuwe tekening.

b. Bepaal het nulpunt bij oneindig domein.

c. Bepaal het dekpunt bij oneindig domein.

OPLOSSING 2

a.



Opmerking : 4 hoger en 2i hoger.

b. Nulpunt :

$4 + 2i - z = 0$

$z = 4 + 2i$

c. Dekpunt :

$4 + 2i - z = z$

$2z = 4 + 2i$

$z = 2 + i$

PARAGRAAF 16.2 : NIET-LINEAIRE COMPLEXE FUNCTIES

LES 1 DE FORMULE F(Z) = LN(Z) MET COMPLEXE GETALLEN

THEORIE COMPLEXE GONIOMETRISCHE FUNCTIES

Er zijn twee complexe goniometrische formules

(1) $\cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

(2) $\sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

BEWIJS VAN COS(Z)

We weten dat :

1. $e^{iz} = \cos(z) + i\ sin(z)$
2. $e^{-iz} = \cos(-z) + i\ sin(-z) = \cos(z) - i\ \sin(z)$
3. $\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \frac{\cos(z)+i\ sin(z)+\cos(z)-i\ sin(z)}{2} = \frac{2\cos(z)}{2} = \cos(z)$

VOORBEELD 1

Gegeven is de formule $f(z) = ln(z)$. Bereken exact de waarde van

a. $\ln(-2e)$

b. $\ln(½i)$

c. $cos(\pi + i)$

OPLOSSING 1

a. **(1)** $ln(-2e) = ln(-2) + ln(e) = ln(-2) + 1$

(2) Omdat $ln(-2)$ niet bestaat gaan we dit omzetten in een complex getal

$ln(-2) = \ln(2 \cdot -1) = ln(2\, e^{\pi i}) = ln(2) + ln(e^{\pi i}) = ln(2) + \pi i$

(3) Dus $ln(-2e) = ln(-2) + ln(e) = ln(2) + \pi i + 1$

b. **(1)** $ln(\frac{1}{2}i) = ln(\frac{1}{2}) + ln(i)$

(2) Omdat $ln(i)$ niet bestaat gaan we dit omzetten in een complex getal

$ln(i) = ln\left(e^{\frac{1}{2}\pi i}\right) = \frac{1}{2}\pi i$

(3) Dus $ln\left(\frac{1}{2}i\right) = ln\left(\frac{1}{2}\right) + ln(i) = ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\pi i$

c. $\cos(2i) = \frac{e^{i(2i)}+e^{-i(2i)}}{2} = \frac{e^{-2}+e^{2}}{2} = \frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2}e^{-2}$

PARAGRAAF 16.4: DERDEGRAADSVERGELIJKINGEN

LES 1 DE FACTORSTELLING

DEFINITIE FACTORSTELLING

- De factorstelling splitst de opgaven op in een vermenigvuldiging van factoren (ontbinden).
- De factoren vind je door een staartdeling te maken.

VOORBEELD 1

Los op $x^3 + 5x^2 + 13x + 9 = 0$.

OPLOSSING 1

(1) Vul een makkelijk getal in om te kijken wanneer deze vergelijking klopt ($-3 \leq$ getal ≤ 3).
In dit geval is dat $x = -1$, want $(-1)^3 + 5(-1)^2 + 13 \cdot -1 + 9 = 0$.
De factor is dan $(x+1)$!!!

(2) Voer een staartdeling uit

$$
\begin{array}{llll}
x + 1 \ / & x^3 + 5x^2 + 13x + 9 & & \backslash \ x^2 + 4x + 9 \\
& \underline{x^3 + 4x^2} & & \\
& \quad x^2 + 13x & & \\
& \quad \underline{x^2 + \ \ 4x} & & \\
& \qquad 9x + 9 & & \\
& \qquad \underline{9x + 9} & & \\
& \qquad\quad 0 & &
\end{array}
$$

Dus $x^3 + 5x^2 + 13x + 9 = 0$

$(x+1)(x^2 + 4x + 9) = 0$

(3) Oplossen

$$(x^2 + 4x + 9)(x + 1) = 0$$

$$x^2 + 4x + 9 = 0 \quad v \quad x + 1 = 0$$

$$(x + 2)^2 + 5 = 0 \quad v \quad x = -1$$

$$(x + 2)^2 = -5 = 5i^2 \quad v \quad x = -1$$

$$x + 2 = \sqrt{5}i \ \ v \ \ x + 2 = -\sqrt{5}i \quad v \quad x = -1$$

$$x = -2 + \sqrt{5}i \ \ v \ \ x = -2 - \sqrt{5}i \quad v \quad x = -1$$

De oplossingen zijn dus $x = -1 \ \ v \ \ x = -2 + \sqrt{5}i \ \ v \ \ x = -2 - \sqrt{5}i$

LES 2 DE FORMULE VAN CARDANO VOOR 3E GRAADS VERGELIJKINGEN

Om een 3e graadsvergelijking op te lossen kun je gebruik maken van de formule van Cardano.

Stappenplan : De formule van Cardano voor 3e graadsvergelijkingen $z^3 + pz = q$

(1) Stel $z = u + v$ en $p = -3uv$.

(2) Herleid de oorspronkelijke vergelijking $z^3 + pz$ tot $u^3 + v^3 = q$.

(3) Gebruik $p = -3uv$ om te herleiden tot $u^6 – qu^3 – r = 0$.

(4) Bereken u^3 en v^3 en daarmee één oplossing van z.

(5) Gebruik een staartdeling (factorstelling) voor de andere 2 oplossingen.

VB1. Los op in C : $x^3 – 9x = 80$

Opl

(1) Stel $z = u + v$ en $-9 = -3uv$.

(2) Dan is $z^3 = (u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 +v^3$.

Dan is $pz = -3uv(u+v) = - 3u^2v - 3uv^2$

Dus is $z^3 + pz = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 +v^3 + (- 3u^2v - 3uv^2) = u^3 + v^3 = 80$ (=q)

(3) Uit $-9 = -3uv$ volgt dat $uv = 3$ dus $v = \frac{3}{u}$.

Dan is $u^3 + v^3 = u^3 + (\frac{3}{u})^3 = u^3 + \frac{27}{u^3} = 80$ $(\times\ u^3)$

Dit geeft $u^6 + 27 = 80u^3$

Dit geeft $u^6 - 80u^3 + 27 = 0$

(4) Met abc is $u^3 = \frac{80+\sqrt{6292}}{2}$ $\vee$ $u^3 = \frac{80-\sqrt{6292}}{2}$

Omdat $u^3 + v^3 = 80$ is $u = \left(\frac{80+\sqrt{6292}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ en $v = \left(80 - \frac{80+\sqrt{6292}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

Omdat $z = u + v$ $z = \left(\frac{80+\sqrt{6292}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(80 - \frac{80+\sqrt{6292}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = 5$

Dit geeft $z = 5$

(5) Voer een staartdeling uit

$$
\begin{array}{lllll}
x - 5 \;/ & x^3 & \qquad - 9x - 80 & & \backslash \; x^2 + 5x + 16 \\
 & \underline{x^3 - 5x^2} & & & \\
 & \quad 5x^2 - 9x & & & \\
 & \quad \underline{5x^2 - 25x} & & & \\
 & & 16x - 80 & & \\
 & & \underline{16x - 80} & & \\
 & & \qquad\quad 0 & &
\end{array}
$$

Dus $x^3 - 9x - 80 = 0$

$(x - 5)(x^2 + 5x + 16) = 0$

Dit verder oplossen met ontbinden.

LES 2 3^E GRAADS VERGELIJKINGEN MET TERM Z^2

Algemeen Stappenplan voor 3^e graadsvergelijkingen $z^3 + az^2 + bz + c = 0$

(1) Substitueer $z = x - \frac{1}{3}a$ in $z^3 + az^2 + bz + c = 0$.

Je krijgt dan een vergelijking van de vorm $x^3 + px - q = 0$ oftewel $x^3 + px = q$

(2) Gebruik nu de formule van Cardano (zie boven).

VOORBEELD 1

Los op in C : $z^3 + 12z^2 - 9z + 5 = 0$

OPLOSSING 1

(1) Neem $z = x - 1/3 \cdot 12 = x - 4$.

Je krijgt dan	$(x-4)^3 + 12(x-4)^2 - 9(x-4) + 5 = 0$
Je krijgt dan	$x^3 - 12x^2 + 48x - 64 + 12(x^2-8x+16) - 9x + 36 + 5 = 0$
Je krijgt dan	$x^3 - 12x^2 + 48x - 64 + 12x^2 - 96x + 192 - 9x + 36 + 5 = 0$
Je krijgt dan	$x^3 - 57x + 169 = 0$
Je krijgt dan	$x^3 - 57x = -169$

En nu Cardano …