PARAGRAAF 15.1 : DYNAMISCHE MODELLEN

LES 1 TEMPERATUURMODEL

THEORIE DYNAMISCH MODEL

- Een dynamisch model is een wiskunde formule waar f(x) maar ook f'(x) in staat.
- Een dynamisch model gaat over verandering ten opzichte van de gegeven hoeveelheid.
- Een voorbeeld is het temperatuurmodel $\frac{dT}{dt} = c(T - T_{omgeving})$.
- Bij dit model is

  $\frac{dT}{dt}$ = { de verandering van de temperatuur van het voorwerp }

  c = { de evenredigheidsconstante }

  T = { de temperatuur van het voorwerp } = { de variabele }

  $T_{omgeving}$ = { omgevingstemperatuur }
- Een ander woord voor een dynamische vergelijking is een differentiaalvergelijking.

VOORBEELD 1

In de eerste 20 seconden dat een pak melk in de koelkast staat, daalt de temperatuur van 16 graden naar 14,4 graden. De temperatuur in de koelkast is 4 graden.

Stel een dynamisch model op van dit pak melk.

OPLOSSING 1

(1) Model $\frac{dT}{dt} = c\left(T - T_{omgeving}\right)$

(2) $\frac{dT}{dt} = \frac{14{,}4-16}{20-0} = \frac{-1{,}6}{20} = -0{,}8$

(3) Om de c te berekenen, neem je altijd de middelste waarde van het interval. Dus

Op t = 10 is de gemiddelde temperatuur $T = \frac{14{,}4+16}{2} = \frac{30{,}4}{2} = 15{,}2$.

(4) Nu c berekenen met punt (5 ; 15,2)

$\frac{dT}{dt} = c\left(T - T_{omgeving}\right) \quad \rightarrow \quad -0{,}8 = c(15{,}2 - 5)$

$c = \frac{10{,}2}{-0{,}8} = 12{,}75$

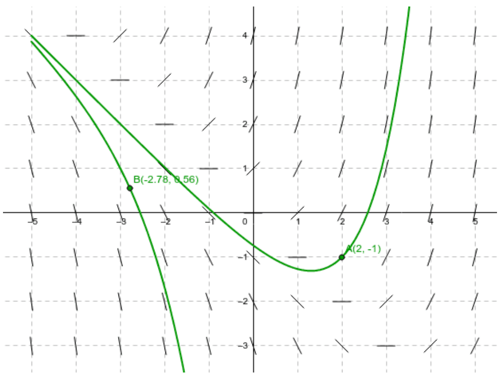
(5) Dus $\frac{dT}{dt} = 12{,}75(T - 4)$

PARAGRAAF 15.2 : DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

LES 1 LIJNELEMENTVELD

THEORIE LIJNELEMENTENVELD

- Een lijnelementveld hoort bij een dynamische vergelijking / differentiaalvergelijking.
- In ieder punt wordt de richting weergegeven waarin de grafiek verder gaat. Zie de tekening hierbeneden :



- Het startpunt bepaalt het verloop van de oplossingskromme (groene lijnen).
- Er zijn vele oplossingen mogelijk bij dit lijnelementveld. Hierboven staan er twee getekend, maar er zijn er vele.

VOORBEELD 1

Gegeven is de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = y - x + 2$.

a. Bereken de richting in ieder punt met $0 \leq x, y \leq 3$.
b. Teken het lijnelementveld.
c. Teken de oplossingskrommen door (0,0) , (-2, 0) en (1,0).
d. Bereken alle punten waar de helling gelijk is aan 0.

Er zijn meerdere oplossingskromme. Een mogelijke oplossing is $y = x - 1$.

e. Toon aan dat deze kromme aan de vergelijking voldoet.

De lijn $y = 3x + 1$ raakt de kromme in het punt A.

f. Bereken de coördinaten van punt A.

OPLOSSING 1

a. Maak een tabel :

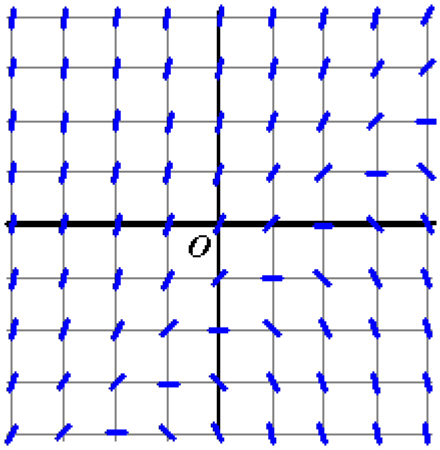
dy/dx=y-x+2

dy/dx = richting

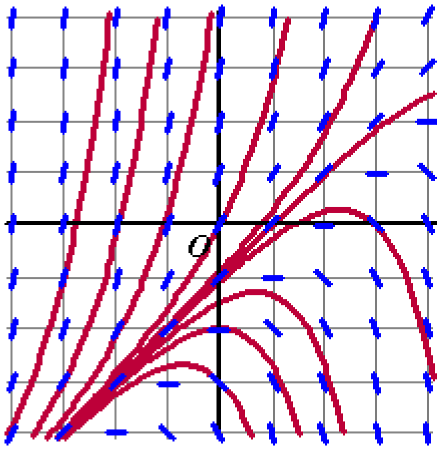
y	0	1	2	3
0	2	3	4	5
1	1	2	3	4
2	0	1	2	3
3	-1	0	1	2

x

b. Teken het lijnelementveld :



c. Teken de krommen in dit lijnelementveld



Er zijn meerdere oplossingen getekend. Kijk goed welke de goede oplossingen zijn.

d. $\frac{dy}{dx} = y - x + 2 = 0$

$y = x - 2$ $\rightarrow$ Dus op de lijn $y = x - 2$ (zie plaatje !!)

e. $y = x - 1$ $\rightarrow \frac{dy}{dx} = y' = 1.$

Invullen in de oorspronkelijke vergelijking geeft $\frac{dy}{dx} = y - x + 2$

$1 = x - 1 - x + 2$

$1 = 1$

Dit klopt, dus dit is een mogelijke oplossingskromme (zie de figuur)

f. $y = 3x - 1$ raakt de kromme, dus $\frac{dy}{dx} = y' = 3.$

Invullen in de oorspronkelijke vergelijking geeft $\frac{dy}{dx} = y - x + 2$

$3 = 3x - 1 - x + 2$

$3 = 2x + 1$

$2 = 2x$

$x = 1$ $\rightarrow y = 3 \cdot 1 - 1 = 2$

Punt A = (1,2)

LES 2 : TEKENOVERZICHT BIJ EEN DIFFERENTIAALVERGELIJKING

TEKENOVERZICHT

In een tekenoverzicht staan maar drie verschillende tekens :

(1) + → Dit betekent dat de helling van de oplossingskromme stijgend is.

(2) - → Dit betekent dat de helling van de oplossingskromme dalend is.

(3) Lijn → Dit betekent dat de helling van de oplossingskromme daar nul is.

VOORBEELD 1

Gegeven is de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = (y-3)\cdot(y-10)$

a. Maak het tekenoverzicht van het lijnelementenveld.

b. Bereken de horizontale asymptoot.

OPLOSSING 1

a. Bereken eerst de punten waar de helling = 0 $\frac{dy}{dt} = (y-3)(y-10) = 0$

$y = 3 \ \vee \ y = 10$

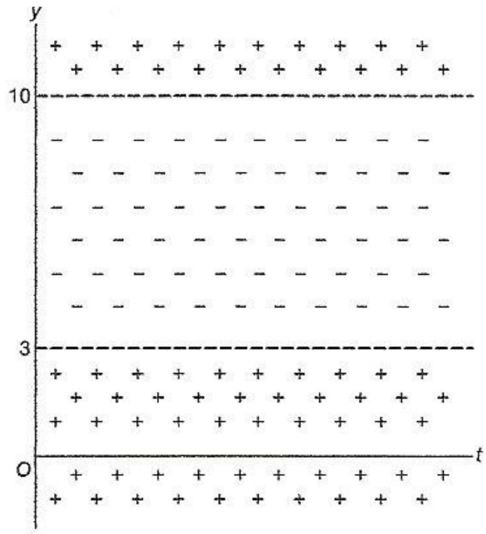
Nu verdeel je het stuk in 3 delen :

(1) Voor $y < 3$ (bijv. $y = 2$) is $\frac{dy}{dt} = (2-3)(2-10) > 0$

(2) Voor $3 < y < 10$ (bijv. $y = 7$) is $\frac{dy}{dt} = (7-3)(7-10) < 0$

(3) Voor $y > 10$ (bijv. $y = 11$) is $\frac{dy}{dt} = (11-3)(11-10) > 0$

Dit geeft het volgende tekenoverzicht :



b. Er is een Horizontale Asymptoot (HA) als

(1) de helling gelijk is aan nul (de oplossingskromme verandert dan niet meer).

(2) de grafiek naar de HA toekruipt.

Er zijn weer drie gevallen :

(1) Voor $y < 3$ (bijv. $y = 2$) is de grafiek stijgend (+). Dus kruipt de grafiek naar de lijn $y = 3$.

(2) Voor $3 < y < 10$ (bijv. $y = 7$) is de grafiek dalend (-). Dus kruipt de grafiek naar lijn $y = 3$.

(3) Voor $y > 10$ (bijv. $y = 11$) is de grafiek stijgend (+). Dus gaat de grafiek weg van de lijn $y = 10$. Dus dit is geen asymptoot.

Dus is er alleen een HA bij $y = 3$!!

PARAGRAAF 15.3 : DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN OPLOSSEN

OPLOSSINGSMETHODE DIFFERENTIAALVERGELIJKING

De algemene aanpak van een differentiaalvergelijking is :

(1) Breng alle termen met y en dy naar links.

(2) Breng alle termen met t en dt naar rechts.

(3) Integreer links en rechts

VOORBEELD 1

Bereken de algemene oplossing van de differentiaalvergelijkingen :

a. $\frac{dy}{dt} = t - 3$

b. $\frac{dy}{dt} = 2y$

c. $\frac{dy}{dt} = ty + t$

OPLOSSING 1

a. $\frac{dy}{dt} = \frac{y-3}{1}$ { Kruiselings Vermenigvuldigen }

$1dy = (t-3)dt$ { Integreren }

$\int 1dy = \int (t-3)dt$

$y = \frac{1}{2}t^2 - 3t + c$ { Dit is de oplossing }

b. $\frac{dy}{dt} = \frac{2y}{1}$ { Kruiselings Vermenigvuldigen }

$1dy = 2ydt$

$\frac{1}{y}dy = 2dt$ { Integreren }

$\ln(y) = 2t + c$

$y = e^{2t+c} = e^{2t} \cdot e^{c} = C_1 \cdot e^{2t}$ { De laatste stappen zijn niet persé nodig }

c. $\frac{dy}{dt} = \frac{ty+t}{1}$ { Kruiselings Vermenigvuldigen }

$1dy = (ty + t)dt$

$1dy = t(y + 1)dt$

$\frac{1}{y+1}dy = tdt$ { Integreren }

$\ln(y + 1) = t^2 + c$

$y + 1 = e^{t^2+c}$

$y = e^{t^2+c} - 1 = C_1 \cdot e^{t^2} - 1$ { De laatste stappen zijn niet persé nodig }

PARAGRAAF 15.4 : DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN VAN DE 1E ORDE

LES 1 : 1E ORDE DIFFERENTIAALVERGELIJKING

Een eerste orde differentiaalvergelijking bevat alleen y en $\frac{dy}{dt} = y'$

Een eerste orde differentiaalvergelijking is van de vorm $\frac{dy}{dt} = f(t) \cdot y + g(t)$

EERSTE ORDE DIFFERENTIAALVERGELIJKING OPLOSSEN

(1) Bepaal eerst de *homogene oplossing* door $\frac{dy}{dt} = f(t) \cdot y$ op te lossen.

(2) Bepaal de *particuliere oplossing* door $\frac{dy}{dt} = f(t) \cdot y + g(t)$ op te lossen. Vul daarvoor bij y een formule in.

(3) *Algemene oplossing = homogene oplossing + particuliere oplossing*

OPMERKING

- Deze splitsing was bij de vorige opgaven nog niet nodig omdat er toen nog geen particuliere oplossing was !!!
- De particuliere oplossing is afhankelijk van het soort functie dat g(t) is. We geven een voorzetje :

Type	*Probeer*
$g(t) = getal$	$y = c$
$g(t) = ct + d$	$y = at + b$
$g(t) = c \cdot cos(x) + d \cdot sin(x)$	$y = acos(x) + bsin(x)$
$g(t) = c \cdot e^{at}$	$y = p \cdot e^{at}$

VOORBEELD 1

Bereken de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking :

a. $\frac{dy}{dx} = 3y + 2x - \frac{1}{3}$

b. $\frac{dy}{dx} = 3y - 3\sin(x)$

OPLOSSING 1

a. **(1)** Homogene oplossing

$\frac{dy}{dx} = \frac{3y}{1}$

$1dy = 3ydx$

$\frac{1}{y}dy = 3dx$

$\ln(y) = 3x + c$

$y = e^{3x+c} = C_1 \cdot e^{3x}$

(2) Particuliere oplossing — Probeer $y = ax + b$

Invullen in $\frac{dy}{dx} = 3y + 2x - \frac{1}{3}$: $a = 3(ax + b) + 2x - \frac{1}{3}$

$0 = 3ax + 2x + 3b - \frac{1}{3} - a$

Dit betekent $3a + 2 = 0 \quad \rightarrow a = -\frac{2}{3}$

Dit betekent $3b - \frac{1}{3} - a = 0$

$a = -\frac{2}{3}$ invullen $3b - 1 = 0 \quad \rightarrow b = \frac{1}{3}$

(3) Algemene oplossing $y = C_1 \cdot e^{3x} - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

b. **(1)** Homogene oplossing

$\frac{dy}{dx} = \frac{3y}{1}$

$1dy = 3ydx$

$\frac{1}{y}dy = 3dx$

$\ln(y) = 3x + c$

$y = e^{3x+c} = C_1 \cdot e^{3x}$

(2) Particuliere oplossing — Probeer $y = a\sin(x) + b\cos(x)$

Invullen in $\frac{dy}{dx} = 3y - 3\sin(x)$: $a\cos(x) - b\sin(x) = 3(a\sin(x) + b\cos(x)) - 3\sin(x)$

Dit betekent bij $\cos(x)$ $a = 3b$

Dit betekent bij $\sin(x)$ $-b = 3a - 3$

Invullen geeft $-b = 9b - 3$

$-10b = -3 \quad \rightarrow b = \frac{3}{10} \qquad \rightarrow a = 3b = \frac{9}{10}$

(3) Algemene oplossing $y = C_1 \cdot e^{3x} + \frac{9}{10}\sin(x) + \frac{3}{10}\cos(x)$

LES 2 : DIFFERENTIAALVERGELIJKING MET Y²

Deze differentiaalvergelijkingen zijn van de vorm $\frac{dy}{dx} = ay^2 + by$

STAPPENPLAN VOOR OPLOSSEN VERGELIJKING : $\frac{dy}{dx} = ay^2 + by$

(1) Schrijf de vergelijking om tot $dy = \cdots$

(2) Vul $y = \frac{1}{u}$ in.

Dit geeft $\frac{dy}{du} = -1 \cdot u^{-2} = -\frac{1}{u^2}$

Dus $dy = -\frac{1}{u^2} du$

(3) Vul dit in en los op de oude manier op

VOORBEELD 1

Los op $\frac{dy}{dx} = 3y^2 + 9y$

OPLOSSING 1

(1) Schrijf de vergelijking om tot $dy = \cdots$

$$\frac{dy}{dx} = 3y^2 + 9y$$

$$dy = (3y^2 + 9y)dx$$

(2) Vul $y = \frac{1}{u}$ in. Er geldt ook $dy = -\frac{1}{u^2} du$

Dit geeft

$$-\frac{1}{u^2} du = \left(3\left(\frac{1}{u}\right)^2 + 9 \cdot \frac{1}{u}\right) dx$$

$$-\frac{1}{u^2} du = \left(\frac{3}{u^2} + \frac{9}{u}\right) dx$$

Vermenigvuldigen met u^2

$$-1du = (3 + 9u)dx$$

$$\frac{du}{dx} = -3 - 9u$$

Nu weer het oude stappenplan met homogene en particuliere oplossing :

(1) Homogene oplossing

$\frac{du}{dx} = -9u$

$\frac{1}{u} du = -9dx$

$\ln(u) = -9x + c$

$y = e^{-9x+c} = C_1 \cdot e^{-9x}$

(2) Particuliere oplossing

Invullen in $\frac{du}{dx} = -3 - 9u$

Probeer $u = a$

$0 = -3 - 9a \quad \to a = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$

(3) Algemene oplossing voor u $\quad u = C_1 \cdot e^{-9x} - \frac{1}{3}$

(4) Algemene oplossing voor y $\quad y = \frac{1}{u} = \frac{1}{C_1 \cdot e^{-9x} - \frac{1}{3}}$

PARAGRAAF 15.5 : DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN VAN DE 2^E ORDE

LES 1 : 2^E ORDE DIFFERENTIAALVERGELIJKING

Een tweede orde differentiaalvergelijking is van de vorm : $y'' + py' + qy = 0$

De oplossingen van deze differentiaalvergelijkingen zijn van de vorm $y = e^{\lambda t}$.
We gaan dit aantonen :

(1) Eerst differentiëren $y' = \lambda e^{\lambda t}$ en $y'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$

(2) Dit invullen geeft $\lambda^2 e^{\lambda t} + p\lambda e^{\lambda t} + qe^{\lambda t} = 0$

(3) $e^{\lambda t}$ buiten haakjes halen $e^{\lambda t}(\lambda^2 + p\lambda + q) = 0$

(4) Dit geeft als oplossing $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$

De vergelijking $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ heet de **karakteristieke vergelijking**

Dit geeft drie mogelijke oplossingen :

(1) Als $D > 0$ met oplossingen $\lambda = a$ en $\lambda = b$ $\rightarrow y = A \cdot e^{at} + B \cdot e^{bt}$

(2) Als $D = 0$ met oplossing $\lambda = a$ $\rightarrow y = (A + Bt) \cdot e^{at}$

(3) Als $D < 0$ met oplossingen $\lambda = a + bi$ en $\lambda = a - bi$ $\rightarrow y = A \cdot e^{(a+bi)t} + B \cdot e^{(a-bi)t}$

OPMERKING

Deze laatste vergelijking kunnen we wat mooier schrijven :

$y = A \cdot e^{at} \cdot e^{bit} + B \cdot e^{at} \cdot e^{-bit}$
$y = e^{at} \cdot (A \cdot e^{bit} + B \cdot e^{-bit})$
$y = e^{at} \cdot (C \cdot \cos(bt) + D \sin(bt))$

VOORBEELD 1

Los op $y'' + 2y' - 8y = 0$ met $y(0) = 5$ en $y'(0) = 20$

OPLOSSING 1

(1) De karakteristieke vergelijking oplossen :

$$\lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0$$
$$(\lambda + 4)(\lambda - 2) = 0$$
$$\lambda = -4 \ v \ \lambda = 2$$

(2) Omdat D > 0 geldt :

$$y = A \cdot e^{-4t} + B \cdot e^{2t}$$
$$y' = -4A \cdot e^{-4t} + 2B \cdot e^{2t}$$

(3) Omdat $y(0) = 5$ geldt :

$$y(0) = A \cdot e^{-4\cdot 0} + B \cdot e^{2\cdot 0} = A \cdot 1 + B \cdot 1$$
$$A + B = 5$$
$$A = -B + 5$$

Omdat $y'(0) = 20$ geldt :

$$y'(0) = -4A \cdot e^{-4\cdot 0} + 2B \cdot e^{2\cdot 0}$$
$$-4A + 2B = 20$$

De 1e vergelijking invullen in de 2e :

$$-4(-B + 5) + 2B = 20$$
$$4B - 20 + 2B = 20$$
$$6B = 40 \qquad \rightarrow B = \frac{40}{6} = 6\frac{2}{3}$$
$$\rightarrow A = -\frac{40}{6} + 5 = -1\frac{2}{3}$$

Dus de oplossing is :

$$y = -1\frac{2}{3} \cdot e^{-4t} + 6\frac{2}{3} \cdot e^{2t}$$