

PARAGRAAF 15.1 : DYNAMISCHE MODELLEN

LES 1 TEMPERATUURMODEL

THEORIE DYNAMISCH MODEL

- Een dynamisch model is een wiskunde formule waar $f(x)$ maar ook $f'(x)$ in staat.
- Een dynamisch model gaat over verandering ten opzichte van de gegeven hoeveelheid.
- Een voorbeeld is het temperatuurmodel $\frac{dT}{dt} = c(T - T_{omgeving})$.
- Bij dit model is
 - $\frac{dT}{dt}$ = { de verandering van de temperatuur van het voorwerp }
 - c = { de evenredigheidsconstante }
 - T = { de temperatuur van het voorwerp } = { de variabele }
 - $T_{omgeving}$ = { omgevingstemperatuur }
- Een ander woord voor een dynamische vergelijking is een differentiaalvergelijking.

VOORBEELD 1

In de eerste 20 seconden dat een pak melk in de koelkast staat, daalt de temperatuur van 16 graden naar 14,4 graden. De temperatuur in de koelkast is 4 graden.

Stel een dynamisch model op van dit pak melk.

OPLOSSING 1

(1) Model $\frac{dT}{dt} = c(T - T_{omgeving})$

(2) $\frac{dT}{dt} = \frac{14,4-16}{20-0} = \frac{-1,6}{20} = -0,8$

(3) Om de c te berekenen, neem je altijd de middelste waarde van het interval. Dus

Op $t = 10$ is de gemiddelde temperatuur $T = \frac{14,4+16}{2} = \frac{30,4}{2} = 15,2$.

(4) Nu c berekenen met punt (10 ; 15,2)

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} = c(T - T_{omgeving}) & \quad \rightarrow \quad -0,8 = c(15,2 - 4) \\ c & = \frac{-0,8}{11,2} = -0,07 \end{aligned}$$

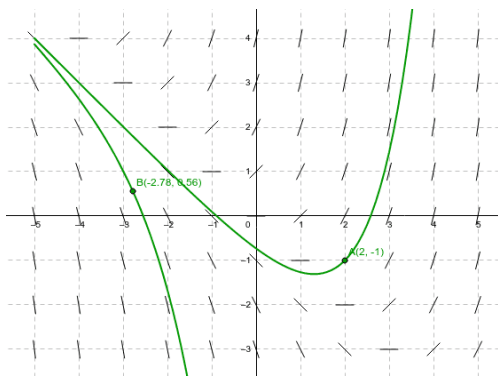
(5) Dus $\frac{dT}{dt} = -0,07(T - 4)$

PARAGRAAF 15.2 : DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

LES 1 LIJNELEMENTVELD

THEORIE LIJNELEMENTENVELD

- Een lijnelementveld hoort bij een dynamische vergelijking / differentiaalvergelijking.
- In ieder punt wordt de richting weergegeven waarin de grafiek verder gaat. Zie de tekening hierbeneden :



- Het startpunt bepaalt het verloop van de oplossingskromme (groene lijnen).
- Er zijn vele oplossingen mogelijk bij dit lijnelementveld. Hierboven staan er twee getekend, maar er zijn er vele.

VOORBEELD 1

Gegeven is de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = y - x + 2$.

- Bereken de richting in ieder punt met $0 \leq x, y \leq 3$.
- Teken het lijnelementveld.
- Teken de oplossingskrommen door $(0,0)$, $(-2, 0)$ en $(1,0)$.
- Bereken alle punten waar de helling gelijk is aan 0.

Er zijn meerdere oplossingskromme. Een mogelijke oplossing is $y = x - 1$.

- Toon aan dat deze kromme aan de vergelijking voldoet.

De lijn $y = 3x + 1$ raakt de kromme in het punt A.

- Bereken de coördinaten van punt A.

OPLOSSING 1

a. Maak een tabel :

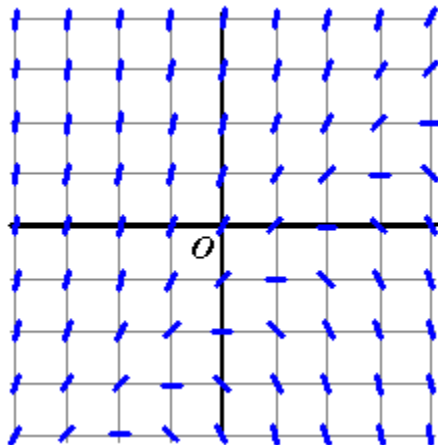
$$dy/dx=y-x+2$$

$dy/dx =$ richting

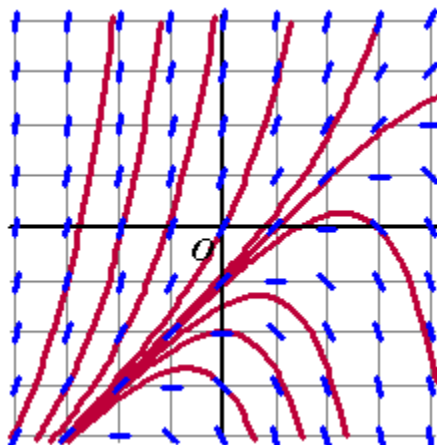
Y	0	1	2	3
0	2	3	4	5
1	1	2	3	4
2	0	1	2	3
3	-1	0	1	2

X

b. Teken het lijnelementveld :



c. Teken de krommen in dit lijnelementveld



Er zijn meerdere oplossingen getekend. Kijk goed welke de goede oplossingen zijn.

d. $\frac{dy}{dx} = y - x + 2 = 0$

$y = x - 2 \rightarrow$ Dus op de lijn $y = x - 2$ (zie plaatje !!)

e. $y = x - 1 \rightarrow \frac{dy}{dx} = y' = 1.$

Invullen in de oorspronkelijke vergelijking geeft $\frac{dy}{dx} = y - x + 2$

$$1 = x - 1 - x + 2$$

$$1 = 1$$

Dit klopt, dus dit is een mogelijke oplossingskromme (zie de figuur)

f. $y = 3x - 1$ raakt de kromme, dus $\frac{dy}{dx} = y' = 3.$

Invullen in de oorspronkelijke vergelijking geeft $\frac{dy}{dx} = y - x + 2$

$$3 = 3x - 1 - x + 2$$

$$3 = 2x + 1$$

$$2 = 2x$$

$$x = 1 \rightarrow y = 3 \cdot 1 - 1 = 2$$

Punt A = (1,2)

LES 2 : TEKENOVERZICHT BIJ EEN DIFFERENTIAALVERGELIJKING

TEKENOVERZICHT

In een tekenoverzicht staan maar drie verschillende tekens :

- (1) + → Dit betekent dat de helling van de oplossingskromme stijgend is.
 (2) - → Dit betekent dat de helling van de oplossingskromme dalend is.
 (3) Lijn → Dit betekent dat de helling van de oplossingskromme daar nul is.

VOORBEELD 1

Gegeven is de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = (y - 3) \cdot (y - 10)$

- a. Maak het tekenoverzicht van het lijnelementenveld.
 b. Bereken de horizontale asymptoot.

OPLOSSING 1

- a. Bereken eerst de punten waar de helling = 0

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= (y - 3)(y - 10) = 0 \\ y &= 3 \quad \vee \quad y = 10\end{aligned}$$

Nu verdeel je het stuk in 3 delen :

(1) Voor $y < 3$ (bijv. $y = 2$) is

$$\frac{dy}{dt} = (2 - 3)(2 - 10) > 0$$

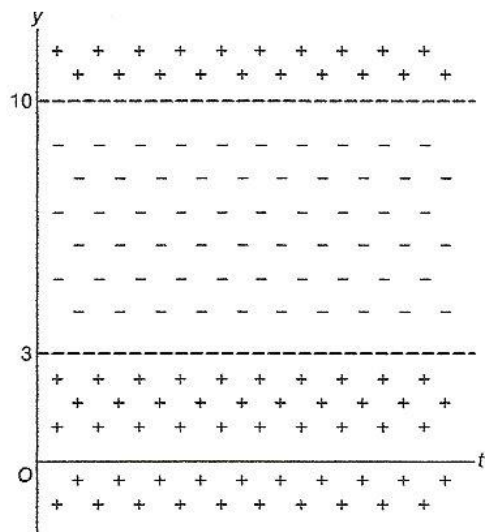
(2) Voor $3 < y < 10$ (bijv. $y = 7$) is

$$\frac{dy}{dt} = (7 - 3)(7 - 10) < 0$$

(3) Voor $y > 10$ (bijv. $y = 11$) is

$$\frac{dy}{dt} = (11 - 3)(11 - 10) > 0$$

Dit geeft het volgende tekenoverzicht :



- b. Er is een Horizontale Asymptoot (HA) als
- (1) de helling gelijk is aan nul (de oplossingskromme verandert dan niet meer).
 - (2) de grafiek naar de HA toekruipt.

Er zijn weer drie gevallen :

- (1) Voor $y < 3$ (bijv. $y = 2$) is de grafiek stijgend (+). Dus kruipt de grafiek naar de lijn $y = 3$.
- (2) Voor $3 < y < 10$ (bijv. $y = 7$) is de grafiek dalend (-). Dus kruipt de grafiek naar lijn $y = 3$.
- (3) Voor $y > 10$ (bijv. $y = 11$) is de grafiek stijgend (+). Dus gaat de grafiek weg van de lijn $y = 10$. Dus dit is geen asymptoot.

Dus is er alleen een HA bij $y = 3$!!

PARAGRAAF 15.3 : DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN OPLOSSEN

OPLOSSINGSMETHODE DIFFERENTIAALVERGELIJKING

De algemene aanpak van een differentiaalvergelijking is :

- (1) Breng alle termen met y en dy naar links.
- (2) Breng alle termen met t en dt naar rechts.
- (3) Integreer links en rechts

VOORBEELD 1

Bereken de algemene oplossing van de differentiaalvergelijkingen :

a. $\frac{dy}{dt} = t - 3$

b. $\frac{dy}{dt} = 2y$

c. $\frac{dy}{dt} = ty + t$

OPLOSSING 1

a. $\frac{dy}{dt} = \frac{t-3}{1}$ { Kruislings Vermenigvuldigen }

$1dy = (t - 3)dt$ { Integreren }

$\int 1dy = \int (t - 3)dt$

$y = \frac{1}{2}t^2 - 3t + c$ { Dit is de oplossing }

b. $\frac{dy}{dt} = \frac{2y}{1}$ { Kruislings Vermenigvuldigen }

$1dy = 2ydt$

$\frac{1}{y}dy = 2dt$ { Integreren }

$\ln(y) = 2t + c$

$y = e^{2t+c} = e^{2t} \cdot e^c = C_1 \cdot e^{2t}$ { De laatste stappen zijn niet persé nodig }

c. $\frac{dy}{dt} = \frac{ty+t}{1}$ { Kruislings Vermenigvuldigen }

$$1dy = (ty + t)dt$$
$$1dy = t(y + 1)dt$$
$$\frac{1}{y+1}dy = tdt$$
 { Integreeren }

$$\ln(y + 1) = \frac{1}{2}t^2 + c$$

$$y + 1 = e^{\frac{1}{2}t^2+c}$$

$$y = e^{\frac{1}{2}t^2+c} - 1 = C_1 \cdot e^{\frac{1}{2}t^2} - 1$$
 { De laatste stappen zijn niet persé nodig }

PARAGRAAF 15.4 : DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN VAN DE 1^E ORDELES 1 : 1^E ORDE DIFFERENTIAALVERGELIJKING

Een eerste orde differentiaalvergelijking bevat alleen y en $\frac{dy}{dt} = y'$

Een eerste orde differentiaalvergelijking is van de vorm $\frac{dy}{dt} = f(t) \cdot y + g(t)$

EERSTE ORDE DIFFERENTIAALVERGELIJKING OPLOSSEN

(1) Bepaal eerst de *homogene oplossing* door $\frac{dy}{dt} = f(t) \cdot y$ op te lossen.

(2) Bepaal de *particuliere oplossing* door $\frac{dy}{dt} = f(t) \cdot y + g(t)$ op te lossen. Vul daarvoor bij y een formule in.

(3) *Algemene oplossing = homogene oplossing + particuliere oplossing*

OPMERKING

- Deze splitsing was bij de vorige opgaven nog niet nodig omdat er toen nog geen particuliere oplossing was !!!
- De particuliere oplossing is afhankelijk van het soort functie dat $g(t)$ is. We geven een voorzetje :

Type

$$g(t) = \text{getal}$$

$$g(t) = ct + d$$

$$g(t) = c \cdot \cos(x) + d \cdot \sin(x)$$

$$g(t) = c \cdot e^{at}$$

Probeer

$$y = c$$

$$y = at + b$$

$$y = a\cos(x) + b\sin(x)$$

$$y = p \cdot e^{at}$$

VOORBEELD 1

Bereken de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking :

a. $\frac{dy}{dx} = 3y + 2x - \frac{1}{3}$

b. $\frac{dy}{dx} = 2y - 3\sin(x)$

OPLOSSING 1

a. (1) Homogene oplossing

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y}{1}$$

$$1dy = 3ydx$$

$$\frac{1}{y} dy = 3dx$$

$$\ln(y) = 3x + c$$

$$y = e^{3x+c} = C_1 \cdot e^{3x}$$

(2) Particuliere oplossing

$$\text{Probeer } y = ax + b$$

$$\text{Invullen in } \frac{dy}{dx} = 3y + 2x - \frac{1}{3}:$$

$$a = 3(ax + b) + 2x - \frac{1}{3}$$

$$0 = 3ax + 2x + 3b - \frac{1}{3} - a$$

Dit betekent

$$3a + 2 = 0 \quad \rightarrow a = -\frac{2}{3}$$

Dit betekent

$$3b - \frac{1}{3} - a = 0$$

$$a = -\frac{2}{3} \text{ invullen}$$

$$3b + \frac{1}{3} = 0 \quad \rightarrow b = -\frac{1}{9}$$

(3) Algemene oplossing

$$y = C_1 \cdot e^{3x} - \frac{2}{3}x - \frac{1}{9}$$

b. (1) Homogene oplossing

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{1}$$

$$1dy = 2ydx$$

$$\frac{1}{y} dy = 2dx$$

$$\ln(y) = 2x + c$$

$$y = e^{2x+c} = C_1 \cdot e^{2x}$$

(2) Particuliere oplossing

$$\text{Probeer } y = a \sin(x) + b \cos(x)$$

$$\text{Invullen in } \frac{dy}{dx} = 3y - 3 \sin(x):$$

$$a \cos(x) - b \sin(x) = 3(a \sin(x) + b \cos(x)) - 3 \sin(x)$$

$$a \cos(x) - b \sin(x) = 3a \sin(x) + 3b \cos(x) - 3 \sin(x)$$

Dit betekent bij $\cos(x)$

$$a = 3b$$

Dit betekent bij $\sin(x)$

$$-b = 3a - 3$$

Invullen geeft

$$-b = 9b - 3$$

$$-10b = -3 \quad \rightarrow b = \frac{3}{10} \quad \rightarrow a = 3b = \frac{9}{10}$$

(3) Algemene oplossing

$$y = C_1 \cdot e^{2x} + \frac{9}{10} \sin(x) + \frac{3}{10} \cos(x)$$

LES 2 : DIFFERENTIAALVERGELIJKING MET y^2

Deze differentiaalvergelijkingen zijn van de vorm $\frac{dy}{dx} = ay^2 + by$

STAPPENPLAN VOOR OPlossen VERGELIJKING : $\frac{dy}{dx} = ay^2 + by$

(1) Schrijf de vergelijking om tot $dy = \dots$

(2) Vul $y = \frac{1}{u}$ in.

Dit geeft $\frac{dy}{du} = -1 \cdot u^{-2} = -\frac{1}{u^2}$

Dus $dy = -\frac{1}{u^2} du$

(3) Vul dit in en los op de oude manier op

VOORBEELD 1

Los op $\frac{dy}{dx} = 3y^2 + 9y$

OPLOSSING 1

(1) Schrijf de vergelijking om tot $dy = \dots$

$$\frac{dy}{dx} = 3y^2 + 9y$$

$$dy = (3y^2 + 9y)dx$$

(2) Vul $y = \frac{1}{u}$ in. Er geldt ook $dy = -\frac{1}{u^2} du$

Dit geeft $-\frac{1}{u^2} du = \left(3 \left(\frac{1}{u}\right)^2 + 9 \cdot \frac{1}{u}\right) dx$

$$-\frac{1}{u^2} du = \left(\frac{3}{u^2} + \frac{9}{u}\right) dx$$

Vermenigvuldigen met u^2

$$-1 du = (3 + 9u) dx$$

$$\frac{du}{dx} = -3 - 9u$$

Nu weer het oude stappenplan met homogene en particuliere oplossing :

(1) Homogene oplossing

$$\frac{du}{dx} = -9u$$

$$\frac{1}{u} du = -9dx$$

$$\ln(u) = -9x + c$$

$$y = e^{-9x+c} = C_1 \cdot e^{-9x}$$

(2) Particuliere oplossing

Probeer $u = a$

Invullen in $\frac{du}{dx} = -3 - 9u$

$$0 = -3 - 9a \rightarrow a = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$$

(3) Algemene oplossing voor u

$$u = C_1 \cdot e^{-9x} - \frac{1}{3}$$

(4) Algemene oplossing voor y

$$y = \frac{1}{u} = \frac{1}{C_1 \cdot e^{-9x} - \frac{1}{3}}$$

PARAGRAAF 15.5 : DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN VAN DE 2^E ORDELES 1 : 2^E ORDE DIFFERENTIAALVERGELIJKING

Een tweede orde differentiaalvergelijking is van de vorm $y'' + py' + qy = 0$

De oplossingen van deze differentiaalvergelijkingen zijn van de vorm $y = e^{\lambda t}$.

We gaan dit aantonen :

- | | |
|------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| (1) Eerst differentiëren | $y' = \lambda e^{\lambda t}$ en $y'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$ |
| (2) Dit invullen geeft | $\lambda^2 e^{\lambda t} + p\lambda e^{\lambda t} + qe^{\lambda t} = 0$ |
| (3) $e^{\lambda t}$ buiten haakjes halen | $e^{\lambda t}(\lambda^2 + p\lambda + q) = 0$ |
| (4) Dit geeft als oplossing | $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ |

De vergelijking $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ heet de **karakteristieke vergelijking**

Dit geeft drie mogelijke oplossingen :

- | | |
|--------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| (1) Als $D > 0$ met oplossingen $\lambda = a$ en $\lambda = b$ | $\rightarrow y = A \cdot e^{at} + B \cdot e^{bt}$ |
| (2) Als $D = 0$ met oplossing $\lambda = a$ | $\rightarrow y = (A + Bt) \cdot e^{at}$ |
| (3) Als $D < 0$ met oplossingen $\lambda = a + bi$ en $\lambda = a - bi$ | $\rightarrow y = A \cdot e^{(a+bi)t} + B \cdot e^{(a-bi)t}$ |

OPMERKING

Deze laatste vergelijking kunnen we wat mooier schrijven :

$$y = A \cdot e^{at} \cdot e^{bit} + B \cdot e^{at} \cdot e^{-bit}$$

$$y = e^{at} \cdot (A \cdot e^{bit} + B \cdot e^{-bit})$$

$$y = e^{at} \cdot (C \cdot \cos(bt) + D \sin(bt))$$

VOORBEELD 1

Los op $y'' + 2y' - 8y = 0$ met $y(0) = 5$ en $y'(0) = 20$

OPLOSSING 1

- (1) De karakteristieke vergelijking oplossen : $\lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0$
 $(\lambda + 4)(\lambda - 2) = 0$
 $\lambda = -4$ v $\lambda = 2$
- (2) Omdat $D > 0$ geldt : $y = A \cdot e^{-4t} + B \cdot e^{2t}$
 $y' = -4A \cdot e^{-4t} + 2B \cdot e^{2t}$
- (3) Omdat $y(0) = 5$ geldt : $y(0) = A \cdot e^{-4 \cdot 0} + B \cdot e^{2 \cdot 0} = A \cdot 1 + B \cdot 1$
 $A + B = 5$
 $A = -B + 5$
- Omdat $y'(0) = 20$ geldt : $y'(0) = -4A \cdot e^{-4 \cdot 0} + 2B \cdot e^{2 \cdot 0}$
 $-4A + 2B = 20$
- De 1^e vergelijking invullen in de 2^e : $-4(-B + 5) + 2B = 20$
 $4B - 20 + 2B = 20$
 $6B = 40 \quad \rightarrow B = \frac{40}{6} = 6\frac{2}{3}$
 $\rightarrow A = -\frac{40}{6} + 5 = -1\frac{2}{3}$
- Dus de oplossing is : $y = -1\frac{2}{3} \cdot e^{-4t} + 6\frac{2}{3} \cdot e^{2t}$