PARAGRAAF 12.1 : KANSDICHTHEID EN KANSVERDELINGSFUNCTIE

LES 1 KANSDICHTHEID BIJ DISCRETE EN CONTINUE VERDELING

DEFINITIE

(1) Kansdichtheid (f) = { Hoe groot is de kans(dichtheid) bij elke mogelijkheid }
(2) Kansverdeling (F) = { Alle kansen samen } = { som van de kansdichtheid }

KANSVERDELING OPSTELLEN

Om een goede kansverdeling op te stellen, moet de kansdichtheid aan twee voorwaarden voldoen :

1. De kans op iedere mogelijkheid x moet minstens 0 zijn — 1. $f(x) \geq 0$
2. De som van alle kansen moet 1 zijn. — 2. $\sum f(x) = 1 \;\; of \;\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Als dit klopt zeggen we dat *f* een kansdichtheid(sfunctie) is.

VOORBEELD 1 (DISCRETE)

Gegeven is een ABCD proefwerk met 2 vragen. John gokt alle twee de vragen.

a. Bereken de kansen bij het aantal goede antwoorden.
b. Controleer of dit een kansdichtheid is.

OPLOSSING 1

a. X = { Aantal vragen goed gegokt }
$X = 0\,,1 \; of \; 2$
$f(0) = P(X = 0) = P(FF) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
$f(1) = P(X = 1) = P(FG) + P(GF) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$
$f(2) = P(X = 2) = P(GG) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

b. **1.** $f(0) \geq 0\,;\; f(1) \geq 0\,;\; f(2) \geq 0$
2. $\sum f(x) = f(0) + f(1) + f(2) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = 1$

Aan beide voorwaarden is voldaan, dus f(x) is een kansdichtheid.

VOORBEELD 2 (CONTINU)

De kansen zijn verdeeld volgens de formule : $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}x^2 & als\ 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & als\ x < 0\ \ v\ x > 3 \end{cases}$

a. Bereken $P(1 < X < 2)$

b. Bereken $P(X < 1)$.

c. Toon aan dat f een kansdichtheid is.

OPLOSSING 2

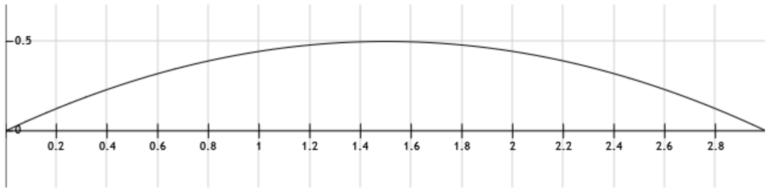
a. $P(1 < X < 2) = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}x^2 dx =$

$P(1 < X < 2) = \left[\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{27}x^3\right]_1^2 = \frac{1}{3} \cdot 2^2 - \frac{2}{27} \cdot 2^3 - \left(\frac{1}{3} \cdot 1^2 - \frac{2}{27} \cdot 1^3\right) = \frac{13}{27}$

b. $P(X < 1) = \int_{-\infty}^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}x^2 dx =$

$P(X < 1) = \left[\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{27}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3} \cdot 1^2 - \frac{2}{27} \cdot 1^3 - \left(\frac{1}{3} \cdot 0^2 - \frac{2}{27} \cdot 0^3\right) = \frac{7}{27}$

c. **1.** Maak een schets van de grafiek van f



Je ziet dat de kansen overal ≥ 0 zijn.

2. Controleren of de som 1 is :

$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 \left(\frac{2}{3}x - \frac{2}{9}x^2\right) dx = \left[\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{27}x^3\right]_0^3 =$

$F(3) - F(0) = \frac{1}{3} \cdot 3^2 - \frac{2}{27} \cdot 3^3 - (0 - 0) = 3 - 2 = 1$

Omdat de som 1 is, is f een kansdichtheid

OPMERKINGEN

De som van al deze kansen noemt men de **(kans)verdelingsfunctie F(X)**.

LES 2 KANSDICHTHEID EN KANSVERDELING

DEFINITIE KANSDICHTHEID

(1) (Kans)Verdelingsfunctie = { Som van alle kansen samen }

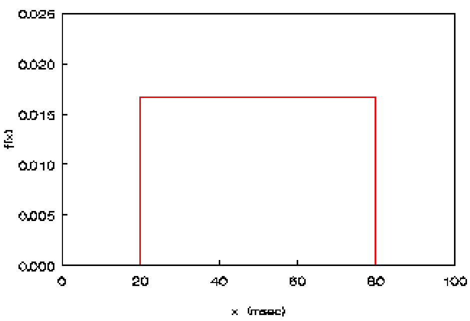
(2) Notatie

$f(x)$ = { kansdichtheidsfunctie }

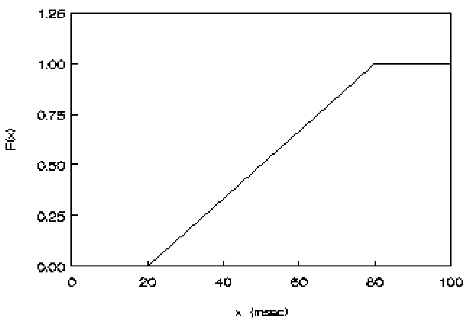
$F(x)$ = { (kans)verdelingsfunctie }

(3) Grafisch is dat

f(x)



F(x)



(4) De kansen zijn over positief (of nul) (f)

(5) Je ziet dat de kansen opgeteld 1 zijn. (F)

(6) Er geldt $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ en $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

(7) Dus ook $F(20) = P(X < 20) = 0$ en $F(80) = P(X < 80) = 1$

VOORBEELD 1

De verdelingsfunctie is gegeven door de formule : $F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{9}{x^2} & als\ x \geq 3 \\ 0 & als\ x < 3 \end{cases}$

a. Bereken $P(X < 4)$.

b. Bereken $P(5 < X < 7)$

c. Bereken $P(X > 5)$

OPLOSSING 1

a. $P(X < 4) = \int_{-\infty}^{4} f(x)dx = \int_{3}^{4} f(x)dx = F(4) - F(3) = F(4) - 0 = F(4)$.

Dus $P(X < 4) = F(4) = 1 - \frac{9}{4^2} = \frac{7}{16}$

b. $P(5 < X < 7) = F(7) - F(5) = 1 - \frac{9}{7^2} - \left(1 - \frac{9}{5^2}\right) = -\frac{9}{49} + \frac{9}{25} = \frac{216}{1225}$

c. $P(X > 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - F(5) = 1 - \left(1 - \frac{9}{5^2}\right) = \frac{9}{25}$

VOORBEELD 2

De kansdichtheid is gegeven door de formule : $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{10} - \frac{1}{25}x & als\ 0 \leq x \leq a \\ 0 & als\ x < 0\ \ v\ x > a \end{cases}$

a. Bereken voor welke waarde(n) van a de functie f een kansdichtheid is, als je weet dat a < 8.

b. Stel het functievoorschrift van de verdelingsfunctie *F*(x) op.

OPLOSSING 2

a. We testen of de som van de kansen 1 is :

(1) De verdelingsfunctie is van de vorm : $F(x) = \frac{3}{10}x - \frac{1}{50}x^2 + c$

(2) Er geldt dat de som 1 moet zijn, dus

$$\int_0^a \left(\frac{3}{10} - \frac{1}{25}x\right) dx = 1$$

(3) $F(a) - F(0) = \frac{3}{10} \cdot a - \frac{1}{50} \cdot a^2 + c - (0 - 0 + c)$

$$F(a) - F(0) = \frac{3}{10}a - \frac{1}{50}a^2 = 1$$
$$-\frac{1}{50}a^2 + \frac{3}{10}a - 1 = 0$$
$$a^2 - 15a + 50 = 0$$
$$(a-5)(a-10) = 0$$
$$a = 5\ \ v\ \ a = 10$$

Omdat a < 8 is de enige oplossing $a = 5$. Dus

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{10} - \frac{1}{25}x & als\ 0 \leq x \leq 5 \\ 0 & als\ x < 0\ \ v\ x > 5 \end{cases}$$

b. De verdelingsfunctie is van de vorm : $F(x) = \frac{3}{10}x - \frac{1}{50}x^2 + c$

Om de c te berekenen gaan we gebruiken we dat $F(0) = 0$ en $F(5) = 1$:

$F(5) = 1$ dus $F(5) = \frac{3}{10} \cdot 5 - \frac{1}{50} \cdot 5^2 + c = 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + c = 1 \quad \rightarrow \quad c = 0$

Dus de verdelingsfunctie *F* is als volgt gedefinieerd :

$$F(x) = \begin{cases} \frac{3}{10}x - \frac{1}{50}x^2 & als\ 0 \leq x \leq 5 \\ 0 & als\ x < 0\ \ v\ x > 5 \end{cases}$$

PARAGRAAF 12.2 DE NORMALE VERDELING

LES 1 DE NORMALE VERDELING EN INTEGRALEN

VOORBEELD 1

Je gooit met 2 dobbelstenen en kijkt naar de som.

OPLOSSING 1

Maak een tabel :

schema

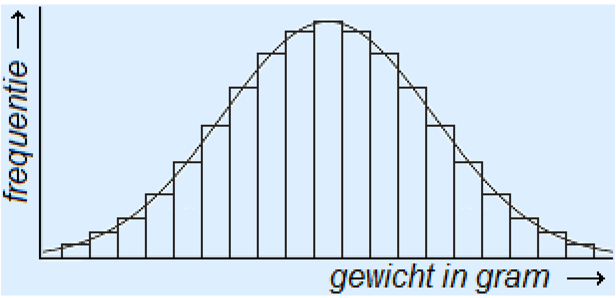
+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Je kunt daarmee de kansen berekenen:

$P(Som = 2) = \frac{1}{36}$

$P(Som = 3) = \frac{2}{36} \dots etc$

Als je de kansen in een staafdiagram weergeeft krijg je een soort normale verdeling / belvorm.



NORMALE VERDELING

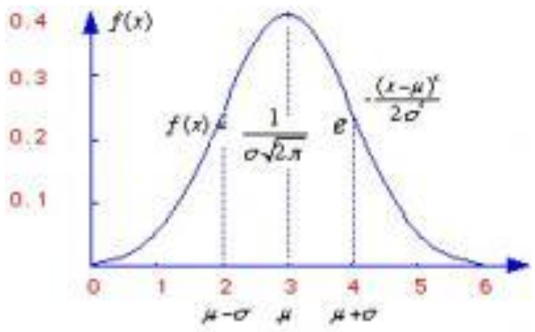
Deze normale verdeling (=belvorm) komt in de kansrekening heel vaak terug.
Een aantal opmerkingen

(1) μ = { Gemiddelde }

(2) σ = { standaardafwijking of standaarddeviatie }

(3) Om de kans te berekenen gebruik je de formule $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

(4) Hieronder zie je de grafiek voor $\mu = 3$ en $\sigma = 1$



(5) Je kunt met deze kansverdelingsformule kansen uitrekenen.

VOORBEELD 2

Je kunt een site beoordelen bij het bedrijf “Webgood”. De beoordeling van een website is een cijfer tussen de 0 en de 6 (beste). De website wiskundehav.nl wil laten beoordelen hoe gebruikers de site vinden. Na een jaar meten blijkt de beoordeling zich te gedragen als een normale verdeling. Er geldt dat de gemiddelde beoordeling 3 is en de standaarddeviatie is 1.
Bereken de kans dat een willekeurige bezoeker

a. Een cijfer lager dan 2 geeft.

b. Tussen de 3 en de 4 geeft.

c. Minstens een 4,5 geeft.

OPLOSSING 2

a. $P(X < 2) = \int_0^2 \frac{1}{1\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-3}{1}\right)^2} dx = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x-3)^2} dx$

Deze kun je niet integreren, dus vandaar met de GR

$Math \rightarrow fnInt \rightarrow \int_0^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x-3)^2} = 0{,}1573$

b. $P(3 < X < 4) = \int_3^4 \frac{1}{1\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-3}{1}\right)^2} dx = \int_3^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x-3)^2} dx$

Deze kun je niet integreren, dus vandaar met de GR

$Math \rightarrow fnInt \rightarrow \int_3^4 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x-3)^2} = 0{,}3413$

c. $P\left(X \geq 4\frac{1}{2}\right) = \int_{4\frac{1}{2}}^6 \frac{1}{1\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-3}{1}\right)^2} dx = \int_{4\frac{1}{2}}^6 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x-3)^2} dx$

Deze kun je niet integreren, dus vandaar met de GR

$Math \rightarrow fnInt \rightarrow \int_{4\frac{1}{2}}^6 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x-3)^2} = 0{,}0655$

OPMERKING

Om dit altijd uit te rekenen met deze integraal is veel intikwerk. Vandaar dat de GR een knop daarvoor heeft en dat is :

Normalcdf(linkergrens , rechtergrens , μ , σ)

Dus bijvoorbeeld bij vraag b) :

$P(3 < X < 4) = \int_3^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x-3)^2} dx = normalcdf(3{,}4{,}3{,}1) = 0{,}3431$

LES 2 NORMALCDF EN INVNORM

DEFINITIES

- Bij de normale verdeling heb je altijd μ en σ nodig.
- Oppervlakte berekenen = Kans berekenen
- Kans berekenen : $Normalcdf(\ linkergrens\ , rechtergrens\ , \mu\ , \sigma)$
- Knop normalcdf zit bij : distr (2nd vrs) > Normalcdf
- NOOIT normalPDF gebruiken.
- Om een grens uit te rekenen, gebruik je $Invnom(linkergrens, , \mu\ , \sigma)$

VOORBEELD 1

In een flesje bier zit gemiddeld 30cl en de standaarddeviatie is 2 cl. De inhoud is normaal verdeeld.

a. Bereken de kans dat in een flesje minder dan 27cl zit.
b. Bereken de kans dat in een flesje meer dan 29 cl zit.
c. Bereken de kans dat in een flesje tussen de 30 en 33 cl zit.

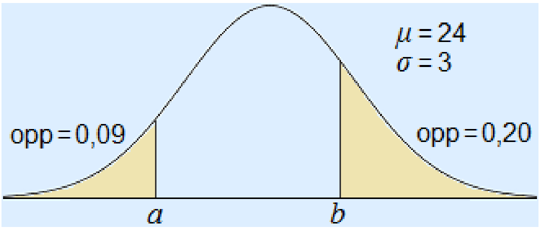
OPLOSSING 1

X = {aantal cl in fles }

a. $P(X < 27) = normalcdf(-10\text{^}99, 27, 30, 2) = 0{,}0668$
b. $P(X > 29) = normalcdf(29, 10\text{^}99, 30, 2) = 0{,}6915$
c. $P(30 < X < 33) = normalcdf(30, 33, 30, 2) = 0{,}4332$

VOORBEELD 2

Bereken de grenzen a en b.



OPLOSSING 2

(1) $a = invNorm(0.09, 24, 3) \approx 20{,}0$

(2) Links van *b* zit een oppervlakte van 1 – 0,20 = 0,80

$b = invNorm(0.80, 24, 3) \approx 26{,}5$

LES 3 σ,μ OF DE GRENS a BEREKEN

VOORBEELD 1

De hoeveelheid werkzame stof bij een tablet is normaal verdeeld met gemiddelde 10 milligram en de $\sigma = 0{,}5$ milligram.

a. Bereken de kans dat een tablet meer dan 11 gram werkzame stof bevat.

b. Bereken hoeveel milligram werkzame stof de laagste 15% bevat ?

Van een ander medicijn is bekend dat $\sigma = 0{,}5$ milligram en dat 8% meer dan 12 milligram bevat.

c. Bereken het gemiddelde.

Van weer een ander medicijn is bekend dat $\mu = 15$ milligram en dat 25% minder dan 12 milligram bevat.

d. Bereken σ.

OPLOSSING 1

a. X = { aantal milligram werkzame stof }

P(X > 11) = normalcdf(11, 10^99, 10, 0.5) = 0,0228

b. P(X > 11) = normalcdf(-10^99, X, 10, 0.5) = 0,15

Y_1= normalcdf(-10^99, X, 10, 0.5)

Y_2= 0,15

[0,10] x [0,0.5]

Intersect geeft X = 9,48

Dus 9,48 of minder

c. P(X > 11) = normalcdf(12, 10^99, X, 0.5) = 0,08

Y_1= normalcdf(12, 10^99, X, 0.5)

Y_2= 0,08

Intersect geeft X = 11,3 dus $\mu = 11{,}3$

d. P(X > 11) = normalcdf(-10^99, 12, 15, X) = 0,25

Y_1= normalcdf(-10^99, 12, 15, X)

Y_2= 0,25

[0,15] x [0,0.5]

Intersect geeft X = 4,4 dus σ = 4,4

OPMERKING:

Het boek gebruikt ook invnorm maar dit is niet nodig.

Bij vraag b is het wel wat sneller :

a = invnorm (0,15,10,0.5) = 9,48

PARAGRAAF 12.3 TOEPASSINGEN VAN DE NORMALE VERDELING

VOORBEELD 1

De lengte van rozen is normaal verdeeld met gemiddeld 25 cm
en σ = 3 cm. Wim neemt een steekproef van 10 rozen.

a. Bereken de kans de 3 van de 10 rozen samen groter dan 27 cm zijn.

b. Bereken de kans meer dan 5 rozen kleiner zijn dan 24 cm.

OPLOSSING 1

a. Deze vraag bestaat uit twee delen

(1) Succeskans p berekenen

$P(R > 27) = normalcdf(27, 10\text{^}99, 25, 3) = 0{,}2525$

(2) X = { aantal keren een grote roos }

$P(X = 3) = binompdf(10\ , 0{,}2525\ , 3) = 0{,}2519$

b. Deze vraag bestaat uit twee delen

(1) Succeskans p berekenen

$P(R < 24) = normalcdf(-10\text{^}99{,}24, 25, 3) = 0{,}3694$

(2) X = { aantal keren een kleine roos }

$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - binomcdf(10\ , 0{,}3694\ , 5) = 0{,}1197$

PARAGRAAF 12.4 SOM EN VERSCHIL VAN TOEVALSVARIABELEN

LES 1 HET VERSCHIL EN DE SOM VAN TWEE (VERSCHILLENDE) VARIABELEN

DEFINITIES

Voor de som en het verschil tussen twee normaal verdeelde (verschillende) variabelen X en Y geldt :

VERSCHIL

(1) V = { X – Y }

(2) $\mu_V = \mu_X - \mu_Y$

(3) $\sigma_V = \sqrt{{\sigma_X}^2 + {\sigma_Y}^2}$

SOM

(1) S = { X + Y }

(2) $\mu_S = \mu_X + \mu_Y$

(3) $\sigma_S = \sqrt{{\sigma_X}^2 + {\sigma_Y}^2}$

VOORBEELD 1

Een productieproces bestaat uit 2 fasen. De eerste fase duurt gemiddeld 6,3 minuten en $\sigma_1 = 0{,}8$. De tweede fase duurt gemiddeld 6,9 minuten en $\sigma_2 = 0{,}3$.

a. Bereken de kans dat de totale productietijd samen minder dan 13 minuten duurt.
b. Bereken de kans dat de tweede fase langer duurt dan de eerste fase.

OPLOSSING 1

a. **(1)** $S = P1 + P2$

(2) $\mu_S = \mu_1 + \mu_2 = 6{,}3 + 6{,}9 = 13{,}2$

(3) $\sigma_S = \sqrt{{\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2} = \sqrt{0{,}8^2 + 0{,}3^2} = \sqrt{0{,}73} \approx 0{,}854..$

(4) $P(S < 13) = normalcdf(-10\text{^}99, 13, 13.2, \sqrt{0{,}73}) = 0{,}407$

b. $P2 > P1 \rightarrow P2 - P1 > 0$

(1) $V = \{P2 - P1\}$

(2) $\mu_S = \mu_2 - \mu_1 = 6{,}9 - 6{,}3 = 0{,}6$

(3) $\sigma_S = \sqrt{{\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2} = \sqrt{0{,}8^2 + 0{,}3^2} = \sqrt{0{,}73} \approx 0{,}854..$

(4) $P(V > 0) = normalcdf(0, 10\text{^}99, 0.6, \sqrt{0{,}73}) = 0{,}759$

LES 2 WORTEL-N WET

DEFINITIES

Voor de som van n keer <u>dezelfde</u> variabele X geldt (ze noemen dit ook wel : een steekproef van n stuks (lengte n))

SOM (S)

(1) $\mu_S = n \cdot \mu_X$

(2) $\sigma_S = \sqrt{n} \cdot \sigma_X$

GEMIDDELDE ($\bar{X}$)

(1) $\mu_{\bar{X}} = \mu_X$

(2) $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$

VOORBEELD 1

De lengte van rozen is normaal verdeeld met gemiddeld 25 cm
en σ = 3 cm. Wim neemt een steekproef van 10 rozen. Wim kijkt naar de totale lengte.

a. Bereken de kans de 10 rozen samen groter dan 270 cm zijn.
b. Bereken de kans een gemiddelde roos uit de steekproef groter dan 28 cm is.

OPLOSSING 1

a. $S = \{\, De\ som\ van\ de\ 10\ rozen\, \}$

(1) $\mu_S = n \cdot \mu_X = 10 \cdot 25 = 250$

(2) $\sigma_S = \sqrt{n} \cdot \sigma_X = \sigma_S = \sqrt{10} \cdot 3 (= 9{,}49)$

(3) $P(S > 270) = normalcdf(270, 10\text{^}99, 250, \sqrt{}10 \cdot 3) = 0{,}0175$

b. $\bar{X}$ = $\{\, De\ gemiddelde\ lengte\ van\ de\ roos\ in\ de\ steekproef\ van\ 10\ stuks \}$

(1) $\mu_{\bar{X}} = 25$

(2) $\sigma_{\bar{X}} = \frac{3}{\sqrt{10}} (\approx 0{,}95)$

(3) $P(\bar{X} > 28) = normalcdf(28, 10\text{^}99, 25, \frac{3}{\sqrt{10}}) = 0{,}0008$