# PARAGRAAF 12.1 : DE FORMULE VAN EULER

## LES 1 DE FORMULE VAN EULER

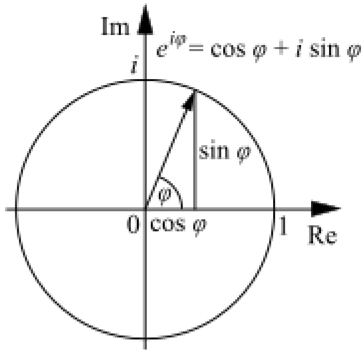
### NOTATIE COMPLEX GETAL

Je kunt complexe getallen op 3 manieren schrijven :

**(1)** Standaardvorm $z = a + bi$
$a = Re(z)$
$b = Im(z)$

**(2)** Poolcoördinaten $z = r(cos(\varphi) + i\,sin\,(\varphi))$
$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
$\tan(\varphi) = \frac{a}{b}$ (of met Angle op de GR)

**(3)** Formule van Euler $z = r \cdot e^{i\varphi} = r(cos(\varphi) + i\,sin\,(\varphi))$
$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
$\tan(\varphi) = \frac{a}{b}$ (of met Angle op de GR)



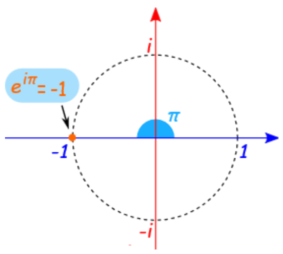

### VOORBEELD 1

Schrijf in de vorm z = a + bi

**a.** $e^{\pi i}$
**b.** $e^{2+\frac{3}{4}\pi i}$

### OPLOSSING 1

**a.** $e^{\pi i} = cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1 + i \cdot 0 = -1$ (zie ook het plaatje)
Dus $a = -1$ en $b = 0$




**b.** $e^{2+\frac{3}{4}\pi i} = e^2 \cdot e^{\frac{3}{4}\pi i} = e^2 \cdot \left(cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + i\,sin\,\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right) = e^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i\right)$

$e^{2+\frac{3}{4}\pi i} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}e^2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}e^2 i$ { Dus $a = = -\frac{1}{2}\sqrt{2}e^2$ en $b = \frac{1}{2}\sqrt{2}e^2 i$ }

## VOORBEELD 2

Schrijf in de vorm $z = r \cdot e^{i\varphi}$

**a.** $z_0 = 1 + i$
**b.** $z_1 = 2 - 2i$
**c.** $z_2 = (2 - 2i)^4$
**d.** $z_3 = \frac{(2-2i)^4}{1+i}$

## OPLOSSING 2

**a.** $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
$\varphi = Angle(1 + i) = \frac{1}{4}\pi$
Dus $z_0 = r \cdot e^{i\varphi} = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{1}{4}\pi i}$

**b.** $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
$\varphi = Angle(2 - 2i) = -\frac{1}{4}\pi$
Dus $z_1 = r \cdot e^{i\varphi} = 2\sqrt{2} \cdot e^{-\frac{1}{4}\pi i}$

**c.** $z_2 = (2 - 2i)^4 = (z_1)^4 = (2^{1\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{4}\pi i})^4 = 2^6 \cdot e^{-\pi i} = 64e^{-\pi i}$

**d.** $z_3 = \frac{(2-2i)^4}{1+i} = \frac{z_2}{z_0} = \frac{2^6 e^{-\pi i}}{\sqrt{2}e^{\frac{1}{4}\pi i}} = 2^{5\frac{1}{2}} \cdot e^{-1\frac{1}{4}\pi i}$

## PARAGRAAF 12.2: VERGELIJKINGEN EN FUNCTIES

## LES 1 VERGELIJKINGEN OPLOSSEN MET DE FORMULE VAN EULER

### VOORBEELD 1

Los de volgende vergelijkingen op m.b.v. de formule van Euler.

**a.** $z^3 = 2 - 2i$
**b.** $(z - 3i)^2 = 10i$
**c.** $z^2 + 2z + 3 = -2i$

### OPLOSSING 1

Vooraf een paar opmerkingen

- In het vorige voorbeeld hebben we al gezien dat $z = 2 - 2i = 2\sqrt{2} \cdot e^{-\frac{1}{4}\pi i}$
- Omdat een rondje verder dezelfde coördinaat oplevert, is de algemene oplossing
  $z = 2 - 2i = 2\sqrt{2} \cdot e^{-\frac{1}{4}\pi i + 2k\pi i}$ { met k het aantal rondjes dat John de Muis extra loopt }

**a.** $z^3 = 2 - 2i$

$z^3 = 2^{1\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{4}\pi i + 2k\pi i}$

$z = (2^{1\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{4}\pi i + 2k\pi i})^{\frac{1}{3}}$

$z = 2^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{12}\pi i + \frac{2}{3}k\pi i} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{12}\pi i + \frac{8}{12}k\pi i}$ { Dit is de algemene oplossing }

De 3 oplossingen (omdat het $z^3$ is) zijn nu :

$k = 0 \rightarrow$ $z_1 = 2^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{12}\pi i + \frac{8}{12} \cdot 0\pi i} = \sqrt{2} \cdot e^{-\frac{1}{12}\pi i}$

$k = 1 \rightarrow$ $z_2 = 2^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{12}\pi i + \frac{8}{12} \cdot 1\pi i} = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{7}{12}\pi i}$

$k = 2 \rightarrow$ $z_3 = 2^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{12}\pi i + \frac{8}{12} \cdot 2\pi i} = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{15}{12}\pi i}$

### OPMERKING

$z_4$ is dezelfde oplossing als $z_1$ want :

$k = 3 \rightarrow$ $z_4 = 2^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{12}\pi i + \frac{8}{12} \cdot 3\pi i} = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{23}{12}\pi i} = \sqrt{2} \cdot e^{-\frac{1}{12}\pi i} = z_1$

**b.** $z = 10i = 10e^{\frac{1}{2}\pi i + 2k\pi i}$ { Want 10i ligt op de positieve y-as, dus hoek = $\frac{1}{2}\pi$ }

We gaan $z - 3i = p$ stellen { pency }

$p^2 = 10i$

$p^2 = 10e^{\frac{1}{2}\pi i + 2k\pi i}$

$p = (10e^{\frac{1}{2}\pi i + 2k\pi i})^{\frac{1}{2}}$

$p = 10e^{\frac{1}{4}\pi i + k\pi i}$

De 2 oplossingen (omdat het $z^2$ is) zijn nu :

$k = 0 \rightarrow$ $p_1 = 10e^{\frac{1}{4}\pi i + 0\pi i} = 10e^{\frac{1}{4}\pi i}$ $\rightarrow z_1 = p_1 + 3i = 10e^{\frac{1}{4}\pi i} + 3i$

$k = 1 \rightarrow$ $p_2 = 10e^{\frac{1}{4}\pi i + 1\pi i} = 10e^{1\frac{1}{4}\pi i}$ $\rightarrow z_2 = p_2 + 3i = 10e^{1\frac{1}{4}\pi i} + 3i$

**c.** Bij deze vergelijking gaan we eerst kwadraat afsplitsen

**(1)** Kwadraat afsplitsen

$$z^2 + 2z + 3 = -2i$$
$$(z+1)^2 + 2 = -2i$$
$$(z+1)^2 = -2 - 2i$$

**(2)** $-2 - 2i$ omzetten in Eulernotatie

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$
$$\varphi = Angle(-2 - 2i) = -\frac{3}{4}\pi$$
$$z = r \cdot e^{i\varphi} = 2\sqrt{2} \cdot e^{-\frac{3}{4}\pi i + 2k\pi i}$$

**(3)** We gaan $p = z + 1$ stellen

$$p^2 = 2\sqrt{2} \cdot e^{-\frac{3}{4}\pi i + 2k\pi i}$$
$$p = (2^{1\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{3}{4}\pi i + 2k\pi i})^{\frac{1}{2}}$$
$$p = 2^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{3}{8}\pi i + k\pi i}$$

De 2 oplossingen (omdat het $z^2$ is) zijn nu :

$k = 0 \rightarrow$ $p_1 = 2^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{3}{8}\pi i + 0\pi i} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{3}{8}\pi i}$ $\rightarrow z_1 = p_1 - 1 = 10e^{\frac{1}{4}\pi i} - 1$

$k = 1 \rightarrow$ $p_2 = 2^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{3}{8}\pi i + 1\pi i} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{5}{8}\pi i}$ $\rightarrow z_2 = p_2 - 1 = 2^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{5}{8}\pi i} - 1$

## LES 2 DE FORMULE F(Z) = LN(Z) MET COMPLEXE GETALLEN

### VOORBEELD 1

Gegeven is de formule $f(z) = ln(z)$. Bereken exact de waarde van

**a.** $z = -2e$
**b.** $z = ½i$

### OPLOSSING 1

**a.** **(1)** Vul $z = -2e$ in, in de formule $f(z) = ln(z)$

$$f(-2e) = ln(-2e) = ln(-2) + ln(e) = ln(-2) + 1$$

**(2)** Omdat $ln(-2)$ niet bestaat gaan we dit omzetten in een complex getal

$$ln(-2) = \ln(2 \cdot -1) = ln(2\,e^{\pi i}) = ln(2) + ln(e^{\pi i}) = ln(2) + \pi i$$

**(3)** Dus $f(-2e) = ln(-2e) = ln(-2) + ln(e) = ln(2) + \pi i + 1$

**b.** **(1)** Vul $z = \frac{1}{2}i$ in, in de formule $f(z) = ln(z)$

$$f\left(\frac{1}{2}i\right) = ln(\frac{1}{2}i) = ln(\frac{1}{2}) + ln(i)$$

**(2)** Omdat $ln(i)$ niet bestaat gaan we dit omzetten in een complex getal

$$ln(i) = ln\left(e^{\frac{1}{2}\pi i}\right) = \frac{1}{2}\pi i$$

**(3)** Dus $f\left(\frac{1}{2}i\right) = ln\left(\frac{1}{2}i\right) = ln\left(\frac{1}{2}\right) + ln(i) = ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\pi i$

# PARAGRAAF 12.3: DERDEGRAADSVERGELIJKINGEN

## LES 1 DE FACTORSTELLING

### DEFINITIE FACTORSTELLING

- De factorstelling splitst de opgaven op in een vermenigvuldiging van factoren (ontbinden).
- De factoren vind je door een staartdeling te maken.

### VOORBEELD 1

Los op $x^3 + 5x^2 + 13x + 9 = 0$.

### OPLOSSING 1

**(1)** Vul een makkelijk getal in om te kijken wanneer deze vergelijking klopt ($-3 \leq$ getal $\leq 3$).
In dit geval is dat $x = -1$, want $(-1)^3 + 5(-1)^2 + 13 \cdot -1 + 9 = 0$.
De factor is dan $(x+1)$ !!!

**(2)** Voer een staartdeling uit

$x + 1 \;/\; x^3 + 5x^2 + 13x + 9 \quad \backslash\; x^2 + 4x + 9$

$\underline{x^3 + 4x^2}$

$x^2 + 13x$

$\underline{x^2 + \;\; 4x}$

$9x + 9$

$\underline{9x + 9}$

$0$

Dus $x^3 + 5x^2 + 13x + 9 = 0$

$(x+1)(x^2 + 4x + 9) = 0$

**(3)** Oplossen

$(x^2 + 4x + 9)(x + 1) = 0$

$x^2 + 4x + 9 = 0 \quad v \quad x + 1 = 0$

$(x + 2)^2 + 5 = 0 \quad v \quad x = -1$

$(x + 2)^2 = -5 = 5i^2 \quad v \quad x = -1$

$x + 2 = \sqrt{5}i \;\; v \;\; x + 2 = -\sqrt{5}i \quad v \quad x = -1$

$x = -2 + \sqrt{5}i \;\; v \;\; x = -2 - \sqrt{5}i \quad v \quad x = -1$

De oplossingen zijn dus $x = -1 \;\; v \;\; x = -2 + \sqrt{5}i \;\; v \;\; x = -2 - \sqrt{5}i$

## LES 2 DE FORMULE VAN CARDANO VOOR 3^E GRAADS VERGELIJKINGEN

Om een 3e graadsvergelijking op te lossen kun je gebruik maken van de formule van Cardano.

**Stappenplan : De formule van Cardano voor 3e graadsvergelijkingen $z^3 + pz = q$**

**(1)** Stel $z = u + v$ en $p = -3uv$.
**(2)** Herleid de oorspronkelijke vergelijking $z^3 + pz$ tot $u^3 + v^3 = q$.
**(3)** Gebruik $p = -3uv$ om te herleiden tot $u^6 - qu^3 - r = 0$.
**(4)** Bereken $u^3$ en $v^3$ en daarmee één oplossing van z.
**(5)** Gebruik een staartdeling (factorstelling) voor de andere 2 oplossingen.

VB1. Los op in C : $x^3 - 9x = 80$

**Opl**

**(1)** Stel $z = u + v$ en $-9 = -3uv$.

**(2)** Dan is $z^3 = (u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$.
Dan is $pz = -3uv(u+v) = -3u^2v - 3uv^2$
Dus is $z^3 + pz = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + (-3u^2v - 3uv^2) = u^3 + v^3 = 80$ (=q)

**(3)** Uit $-9 = -3uv$ volgt dat $uv = 3$ dus $v = \frac{3}{u}$.

Dan is $u^3 + v^3 = u^3 + (\frac{3}{u})^3 = u^3 + \frac{27}{u^3} = 80$ $(\times\ u^3)$

Dit geeft $u^6 + 27 = 80u^3$

Dit geeft $u^6 - 80u^3 + 27 = 0$

**(4)** Met abc is $u^3 = \frac{80+\sqrt{6292}}{2} \quad v \quad u^3 = \frac{80-\sqrt{6292}}{2}$

Omdat $u^3 + v^3 = 80$ is $u = \left(\frac{80+\sqrt{6292}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \quad en \quad v = \left(80 - \frac{80+\sqrt{6292}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

Omdat $z = u + v$ $z = \left(\frac{80+\sqrt{6292}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(80 - \frac{80+\sqrt{6292}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = 5$

Dit geeft $z = 5$

**(5)** Voer een staartdeling uit

$$
\begin{array}{lll}
x - 5 \;/ & x^3 \qquad - 9x - 80 & \backslash\; x^2 + 5x + 16 \\
 & \underline{x^3 - 5x^2} & \\
 & \quad 5x^2 - 9x & \\
 & \quad \underline{5x^2 - 25x} & \\
 & \qquad\quad 16x - 80 & \\
 & \qquad\quad \underline{16x - 80} & \\
 & \qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Dus $x^3 - 9x - 80 = 0$

$(x - 5)(x^2 + 5x + 16) = 0$

Dit verder oplossen met onbinden.

## LES 2 3$^{E}$ GRAADS VERGELIJKINGEN MET TERM $Z^2$

**Algemeen Stappenplan voor 3$^{e}$ graadsvergelijkingen $z^3 + az^2 + bz + c = 0$**

**(1)** Substitueer $z = x - \frac{1}{3}a$ in $z^3 + az^2 + bz + c = 0$.
Je krijgt dan een vergelijking van de vorm $x^3 + px - q = 0$ oftewel $x^3 + px = q$
**(2)** Gebruik nu de formule van Cardano (zie boven).

### VOORBEELD 1

Los op in C : $z^3 + 12z^2 - 9z + 5 = 0$

### OPLOSSING 1

**(1)** Neem $z = x - 1/3 \cdot 12 = x - 4$.

Je krijgt dan $(x-4)^3 + 12(x-4)^2 - 9(x-4) + 5 = 0$

Je krijgt dan $x^3 - 12x^2 + 48x - 64 + 12(x^2-8x+16) - 9x + 36 + 5 = 0$

Je krijgt dan $x^3 - 12x^2 + 48x - 64 + 12x^2 - 96x + 192 - 9x + 36 + 5 = 0$

Je krijgt dan $x^3 - 57x + 169 = 0$

Je krijgt dan $x^3 - 57x = - 169$

**(2)** En nu Cardano …

# PARAGRAAF 12.4: LINEAIRE DIFFERENTIEVERGELIJKINGEN (2^E ORDE)

## LES 1 DIRECTE FORMULE BIJ RECURSIEVERGELIJKINGEN U(N-1) EN U(N-2)

### VOORBEELD 1

Gegeven is de recursievergelijking $u(n) = a \cdot u(n-1) + b \cdot u(n-2)$.

Hoe bereken je de oplossingen van deze vergelijking ?

### OPLOSSING 1

**(1)** De oplossingen zijn van de vorm $u(n) = g^n$.
Dit betekent dat $u(n-1) = g^{n-1}$
$u(n-2) = g^{n-2}$

**(2)** Invullen in $u(n) = a \cdot u(n-1) + b \cdot u(n-2)$ geeft $g^n = ag^{n-1} + bg^{n-2}$
Delen door $g^{n-2}$ geeft $g^2 = ag + b$
$g^2 - ag - b = 0$

**(3)** Deze laatste vergelijking heet ook wel de karakteristieke vergelijking : $g^2 - ag - b = 0$
Deze kun je oplossen (binnen C) met de abc-formule !!!

## SAMENGEVAT

**ALGEMEEN STAPPENPLAN VOOR OPLOSSEN U(N) = A·U(N-1) + B·U(N-2).**

**(1)** Stel $u(n) = g^n$.
Er ontstaat dan de karakteristieke vergelijking : $g^2 - a \cdot g - b = 0$

**(2)** Gebruik nu de abc-formule (evt. complex) voor de twee oplossingen $g_1$ en $g_2$.

**(3)** $D > 0$ : $u(n) = A\,(g_1)^n + B\,(g_2)^n$
$D = 0$ : $u(n) = (A + Bn)\,(g_1)^n$ $\{ g_1 = g_2 \}$
$D < 0$ : $u(n) = (A\cos(\varphi_1 n) + B\sin(\varphi_1 n)) \cdot (g)^n$ {met $\varphi_1 = \arg(g_1)$ en $g = |g_1|$ of $g_2$ }

**(4)** Bereken A en B met behulp van de twee startwaarden.

**VOORBEELD 2**

Los op u(n) = 4·u(n-1) - 5·u(n-2) en u(0) = 2 en u(1) = 6.

**Opl**

**(1)** Neem $u(n) = g^n$. Je krijgt dan : $g^2 - 4g + 5 = 0$

**(2)** Los op : $(g-2)^2 + 1 = 0$

$(g-2)^2 = -1 = i^2$

$g-2 = i \ \vee \ g-2 = -i$

$g = 2 + i \ \vee \ g = 2 - i$

**(3)** $\varphi_1 = \arg(2+i) = 26{,}6$ en $|2+i| = \sqrt{5}$. Dit geeft

$u(n) = (A\cos(26{,}6n) + B\sin(26{,}6n))\cdot(\sqrt{5})^n$

**(4)** $u(0) = (A\cos(26{,}6\cdot 0) + B\sin(26{,}6\cdot 0))\cdot(\sqrt{5})^0 = A(\cos(0) + B\sin(0))\cdot 1 = A = 2$

$u(1) = (2\cos(26{,}6\cdot 1) + B\sin(26{,}6\cdot 1))\cdot(\sqrt{5})^1 = 6$

$u(1) = (1{,}79 + B\cdot 0{,}45)\cdot(\sqrt{5}) = 6$

$4 + 1{,}01B = 6$

$1{,}01B = 2$

$B = 1{,}99$

Dus de oplossing is : $u(n) = (2\cos(26{,}6n) + 1{,}99\sin(26{,}6n))\cdot(\sqrt{5})^n$

## LES 2 STELSELS BIJ RECURSIEVERGELIJKINGEN U(N-1) EN U(N-2)

### VOORBEELD 1

Los op

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + 3y_{n-1} & (1) \\ y_n = 2x_{n-1} + y_{n-1} & (2) \end{cases}$$ met $x_0 = 3$ en $y_0 = 7$

### OPLOSSING 1

**(1)** Schrijf één van de twee in de $x_{n-1}$ vorm, dan kun je de twee combineren

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 3y_n \\ y_n = 2x_{n-1} + y_{n-1} \end{cases}$$

**(2)** Combineren geeft

$$x_{n+1} = x_n + 3(2x_{n-1} + y_{n-1}) = x_n + 6x_{n-1} + 3y_{n-1}$$

**(3)** Nu moet $y_{n-1}$ nog weg. Uit (1) volgt dat : $3y_{n-1} = x_n - x_{n-1}$

Dus $x_{n+1} = x_n + 6x_{n-1} + 3y_{n-1} = x_n + 6x_{n-1} + (x_n - x_{n-1}) = 2x_n + 5x_{n-1}$ |

**(4)** Schrijf een weer in de $x_n$ vorm terug

$$x_n = 2x_{n-1} + 5x_{n-2}$$

Deze vergelijking kun je oplossen met de karakteristieke vergelijking en $x_0 = 3$ en

$x_1 = x_0 + 3y_0 = 3 + 3\cdot 7 = 24$ { vergelijking (1) }