

## PARAGRAAF 10.1 : REKENEN MET COMPLEXE GETALLEN

## LES 1 VERZAMELINGEN EN KWADRAAT AFSPLITSEN

## DEFINITIES VERZAMELINGEN

Er zijn verschillende verzamelingen getallen :

- |                                      |   |
|--------------------------------------|---|
| (1) N = Natuurlijke getallen         | = 1,2,3,.....                                     |
| (2) Z = Gehele getallen              | = ... ,-3,-2,-1,0,1,2,3,.....                     |
| (3) Q = Rationale getallen (breuken) | = Z en $\frac{1}{2}$ , $-1\frac{3}{4}$ , etc...   |
| (4) R = Reële getallen               | = Q en $\sqrt{7}$ , $\pi$ , $\sqrt[3]{328}$ , etc |
| (5) C = Complexe getallen            | = R en alles van de vorm a+bi                     |

## THEORIE COMPLEXE GETALLEN

- (1) Complexe getallen zijn getallen van de vorm  $z = a + bi$  met  $i^2 = -1$ .
- (2) Voorbeelden zijn  $3 + 4i$ ,  $10 - 2i$ , maar ook  $-3i (= 0 - 3i)$  of  $4 (= 4 + 0i)$

## STAPPENPLAN KWADRAAT AFSPLITSEN

- (i) Schrijf  $(x + \frac{1}{2}b)^2$  uit.
- (ii) Vul dit in de opgave in en los de vergelijking op.

## VOORBEELD 1

Los de vergelijking  $x^2 + 8x - 20 = 0$  op met kwadraat afsplitsen.

## OPLOSSING 1

(i)  $(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$

(ii) Vul in en los de vergelijking op.

$$x^2 + 8x - 20 = 0$$

$$x^2 + 8x + 16 - 36 = 0$$

$$(x + 4)^2 - 36 = 0$$

$$(x + 4)^2 = 36$$

$$x + 4 = 6 \vee x + 4 = -6$$

$$x = 2 \vee x = -10$$

**VOORBEELD 2**

Los de vergelijkingen op. Maak gebruik van  $i^2 = -1$

a.  $x^2 + 4x + 9 = 0$

b.  $x^2 - 5x + 16\frac{1}{4} = 0$

**OPLOSSING 2**

a. Eerst het kwadraat afsplitsen :

(i)  $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$

(ii)  $x^2 + 4x + 9 = 0$

$$x^2 + 4x + 4 + 5 = 0$$

$$(x + 2)^2 + 5 = 0$$

$$(x + 2)^2 = -5 = 5i^2$$

$$x + 2 = \sqrt{5}i \quad \vee \quad x + 2 = -\sqrt{5}i$$

$$x = -2 + \sqrt{5}i \quad \vee \quad x = -2 - \sqrt{5}i$$

b. (i)  $(x - 2\frac{1}{2})^2 = x^2 - 5x + 6\frac{1}{4}$

(ii)  $x^2 - 5x + 16\frac{1}{4} = 0$

$$x^2 - 5x + 6\frac{1}{4} + 10 = 0$$

$$(x - 2\frac{1}{2})^2 + 10 = 0$$

$$(x - 2\frac{1}{2})^2 = -10 = 10i^2$$

$$x - 2\frac{1}{2} = \sqrt{10}i \quad \vee \quad x - 2\frac{1}{2} = -\sqrt{10}i$$

$$x = 2\frac{1}{2} + \sqrt{10}i \quad \vee \quad x = 2\frac{1}{2} - \sqrt{10}i$$

## LES 2 : REKENEN MET COMPLEXE GETALLEN

## DEFINITIE GECONJUNGEERDE

$\bar{z} = \{ \text{geconjugeerde van } z \}$

Als  $z = a + bi$  dan is  $\bar{z} = a - bi$

## VIER BEWERKINGEN

Er zijn vier bewerkingen die we uitleggen aan de hand van een voorbeeld.

## VOORBEELD 1

**(1) Plus**       $(3 + 4i) + (5 + 7i) = 8 + 11i$

**(2) Min**       $(3 + 4i) - (5 + 7i) = -2 - 3i$

**(3) Keer**       $(3 + 4i) \cdot (5 + 7i) =$   
 $15 + 21i + 20i + 28i^2 = 15 + 41i - 28 = -13 + 41i$

**(4) Delen**       $\frac{3+4i}{5+7i} = \frac{3+4i}{5+7i} \times \frac{5-7i}{5-7i} = \frac{15-21i+20i-28i^2}{25-49i^2} = \frac{15-i+28}{25+49} = \frac{43-i}{74} = \frac{43}{74} - \frac{1}{74}i$

## PARAGRAAF 10.2 : HET COMPLEXE VLAK

## LES 1 : TEKENEN IN HET COMPLEXE VLAK

## EEN AANTAL BEGRIPPEN BIJ DE COMPLEXE VECTOR Z

Gegeven is het complexe getal  $z = 1 + 2i$ . Een aantal begrippen / definities :

(1)  $|z| = \{\text{Modulus van } z\} = \sqrt{a^2 + b^2} = \{\text{Lengte van de vector / straal van de cirkel}\}$

## VOORBEELD

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

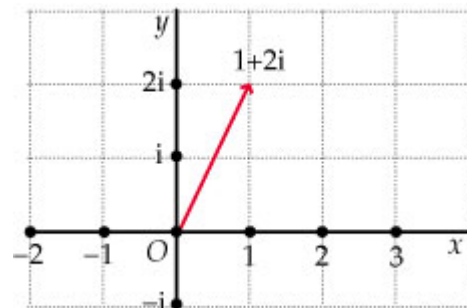
(2)  $\text{Re}(z) = a$  en  $\text{Im}(z) = b$

## VOORBEELD

$$\text{Re}(1 + 2i) = 1$$

$$\text{Im}(1 + 2i) = 2$$

(3) Tekenen van  $z = 1 + 2i$



(4)  $\text{Arg}(z) = \{\text{Het argument van } z\} = \{\text{Hoek met de positieve x-as}\}$

## VOORBEELD

$$\text{Arg}(1 + i) = 45^\circ \text{ want } \tan \alpha = \frac{1}{1} \text{ dus } \alpha = 45^\circ$$

---

**VOORBEELD 1**

Teken de volgende figuren

- a.  $\text{Im}(z) = 3$
- b.  $\text{Im}(z) + \text{Re}(z) = 4$
- c.  $|z| = 2$
- d.  $|z - 1 - 2i| = 3$
- e.  $45^\circ \leq \text{Arg} \leq 90^\circ$

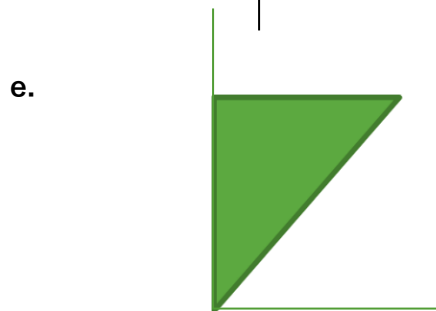
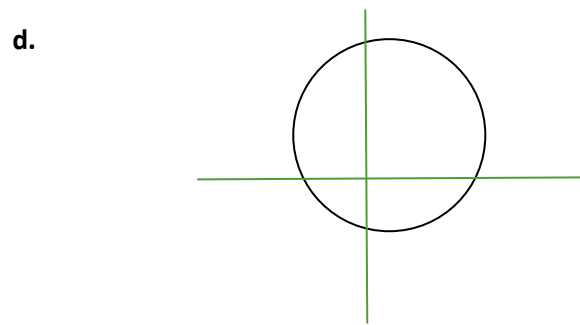
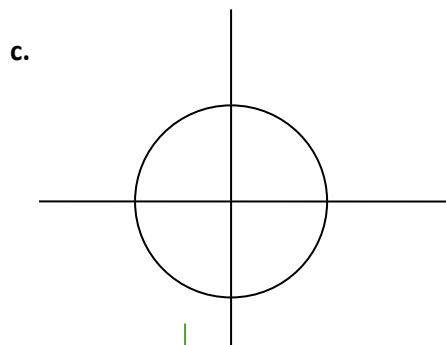
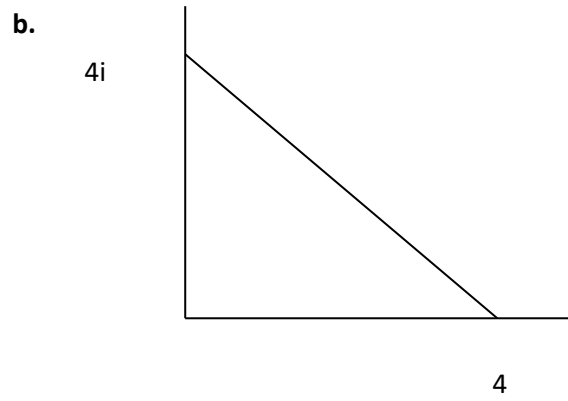
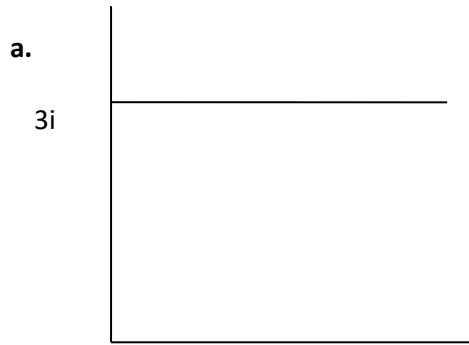
---

**OPLOSSING 1**

- a.  $\text{Im}(z) = 3 \quad \rightarrow y = 3$
- b.  $\text{Im}(z) + \text{Re}(z) = 4 \quad \rightarrow x + y = 4 \quad \rightarrow y = 4 - x$
- c.  $|z| = 2 \quad \rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 2 \quad \rightarrow a^2 + b^2 = 2^2$  (dit is een cirkel met straal 2)
- d.  $|z - 1 - 2i| = 3 \quad \rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 3 \quad \rightarrow a^2 + b^2 = 3^2$  (dit is een cirkel met straal 3 en middelpunt  $1 + 2i$ )
  
- e.  $45^\circ \leq \text{Arg} \leq 90^\circ$  (hoek tussen 45 en 90 graden)

**Voor de tekeningen zie de volgende pagina !!!**

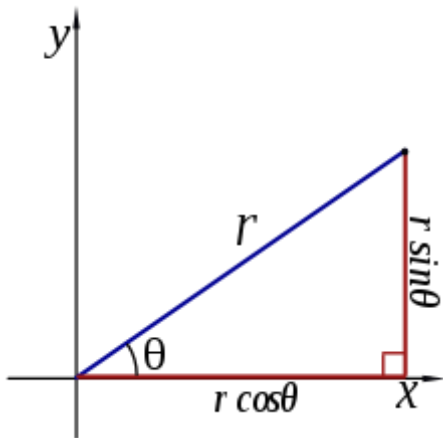
TEKENINGEN 1



## PARAGRAAF 10.3 : POOLCOÖRDINATEN EN DE FORMULE VAN EULER

## LES 1 : POOLCOÖRDINATEN

## THEORIE COMPLEXE GETALLEN



(1) Er geldt :  $\sin(\theta) = \frac{y\text{-coördinaat}}{r}$  dus  $y = r \cdot \sin(\theta)$

(2) Zo ook :  $\cos(\theta) = \frac{x\text{-coördinaat}}{r}$  dus  $x = r \cdot \cos(\theta)$

(3) In het complexe vlak :

$$z = x + iy = r \cdot \cos(\theta) + ir \cdot \sin(\theta) = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$$

(4) Je kunt ze als volgt berekenen

- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$  (en let op kwadrant en  $-180 \leq \theta \leq 180$ )

---

**VOORBEELD 1**

Schrijf als poolcoördinaat :

- a.  $z = 1 + i$
- b.  $z = 1 - \sqrt{3}i$
- c.  $z = -3 + 2i$

---

**OPLOSSING 1**

a.  $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$$\tan(\theta) = \frac{1}{1} \rightarrow \theta = 45^\circ$$

Dus  $z = x + iy = \sqrt{2}(\cos(45) + i \sin(45))$

b.  $r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$

$$\tan(\theta) = \frac{-\sqrt{3}}{1} \rightarrow \theta = -60^\circ$$

Dus  $z = x + iy = 2(\cos(-60) + i \sin(-60))$

c.  $r = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

Je kunt nu ook met de knop Angle werken. Dit gaat als volgt :

- Mode  $\rightarrow$  Real  $\Rightarrow$  a+bi
- Catalog (2nd 0)  $\rightarrow$  Angle (-3+2i) = 146  $\rightarrow \theta = 146^\circ$

Dus  $z = x + iy = \sqrt{13}(\cos(146) + i \sin(146))$



## LES 2 DE FORMULE VAN EULER

## NOTATIE COMPLEX GETAL

Je kunt complexe getallen op 3 manieren schrijven :

**(1)** Standaardvorm  $z = a + bi$

$$a = \operatorname{Re}(z)$$

$$b = \operatorname{Im}(z)$$

**(2)** Poolcoördinaten  $z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$

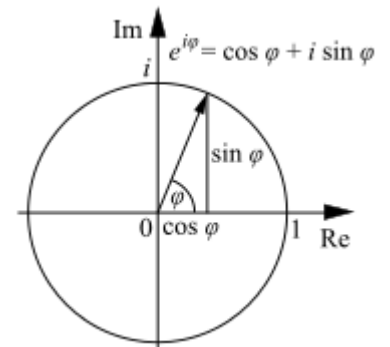
$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{b}{a} \quad (\text{of met Angle op de GR})$$

**(3)** Formule van Euler  $z = r \cdot e^{i\varphi} = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{b}{a} \quad (\text{of met Angle op de GR})$$



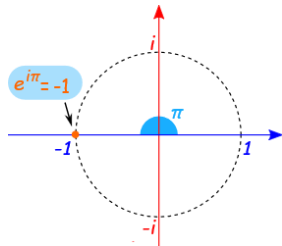
**VOORBEELD 1**Schrijf in de vorm  $z = a + bi$ 

a.  $e^{\pi i}$

b.  $e^{2+\frac{3}{4}\pi i}$

**OPLOSSING 1**

a.  $e^{\pi i} = \cos(\pi) + i \sin(\pi) = -1 + i \cdot 0 = -1$  (zie ook het plaatje)

Dus  $a = -1$  en  $b = 0$ 

b.  $e^{2+\frac{3}{4}\pi i} = e^2 \cdot e^{\frac{3}{4}\pi i} = e^2 \cdot \left( \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + i \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) \right) = e^2 \cdot \left( -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i \right)$

$$e^{2+\frac{3}{4}\pi i} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}e^2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}e^2i \quad \{ \text{Dus } a = -\frac{1}{2}\sqrt{2}e^2 \text{ en } b = \frac{1}{2}\sqrt{2}e^2i \}$$

**VOORBEELD 2**

Schrijf in de vorm  $z = r \cdot e^{i\varphi}$

- a.  $z_0 = 1 + i$
- b.  $z_1 = 2 - 2i$
- c.  $z_2 = (2 - 2i)^4$
- d.  $z_3 = \frac{(2-2i)^4}{1+i}$

**OPLOSSING 2**

a.  $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$$\varphi = \text{Angle}(1 + i) = \frac{1}{4}\pi$$

$$\text{Dus } z_0 = r \cdot e^{i\varphi} = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{1}{4}\pi i}$$

b.  $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$\varphi = \text{Angle}(2 - 2i) = -\frac{1}{4}\pi$$

$$\text{Dus } z_1 = r \cdot e^{i\varphi} = 2\sqrt{2} \cdot e^{-\frac{1}{4}\pi i}$$

c.  $z_2 = (2 - 2i)^4 = (z_1)^4 = (2^{1\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{4}\pi i})^4 = 2^6 \cdot e^{-\pi i} = 64e^{-\pi i}$

d.  $z_3 = \frac{(2-2i)^4}{1+i} = \frac{z_2}{z_0} = \frac{2^6 e^{-\pi i}}{\sqrt{2} e^{\frac{1}{4}\pi i}} = 2^{5\frac{1}{2}} \cdot e^{-1\frac{1}{4}\pi i}$

## PARAGRAAF 10.4: VERGELIJKINGEN EN FUNCTIES

## LES 1 VERGELIJKINGEN OPLOSSEN MET DE FORMULE VAN EULER

## VOORBEELD 1

Los de volgende vergelijkingen op m.b.v. de formule van Euler.

- $z^3 = 2 - 2i$
- $(z - 3i)^2 = 10i$
- $z^2 + 2z + 3 = -2i$

## OPLOSSING 1

Vooraf een paar opmerkingen

- In het vorige voorbeeld hebben we al gezien dat  $z = 2 - 2i = 2\sqrt{2} \cdot e^{-\frac{1}{4}\pi i}$
- Omdat een rondje verder dezelfde coördinaat oplevert, is de algemene oplossing
 
$$z = 2 - 2i = 2\sqrt{2} \cdot e^{-\frac{1}{4}\pi i + 2k\pi i} \quad \{ \text{met } k \text{ het aantal rondjes dat John de Muis extra loopt} \}$$

a.  $z^3 = 2 - 2i$

$$z^3 = 2^{1\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{4}\pi i + 2k\pi i}$$

$$z = \left( 2^{1\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{4}\pi i + 2k\pi i} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$z = 2^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{12}\pi i + \frac{2}{3}k\pi i} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{12}\pi i + \frac{8}{12}k\pi i} \quad \{ \text{Dit is de algemene oplossing} \}$$

De 3 oplossingen (omdat het  $z^3$  is) zijn nu :

$$k = 0 \rightarrow z_1 = 2^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{12}\pi i + \frac{8}{12} \cdot 0\pi i} = \sqrt{2} \cdot e^{-\frac{1}{12}\pi i}$$

$$k = 1 \rightarrow z_2 = 2^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{12}\pi i + \frac{8}{12} \cdot 1\pi i} = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{7}{12}\pi i}$$

$$k = 2 \rightarrow z_3 = 2^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{12}\pi i + \frac{8}{12} \cdot 2\pi i} = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{15}{12}\pi i}$$

## OPMERKING

$z_4$  is dezelfde oplossing als  $z_1$  want :

$$k = 3 \rightarrow z_4 = 2^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{12}\pi i + \frac{8}{12} \cdot 3\pi i} = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{23}{12}\pi i} = \sqrt{2} \cdot e^{-\frac{1}{12}\pi i} = z_1$$

- b.  $(z - 3i)^2 = 10i = 10e^{\frac{1}{2}\pi i + 2k\pi i}$  { Want  $10i$  ligt op de positieve  $y$ -as, dus hoek  $= \frac{1}{2}\pi$  }  
 We gaan  $z - 3i = p$  stellen { pency }

$$p^2 = 10i$$

$$p^2 = 10e^{\frac{1}{2}\pi i + 2k\pi i}$$

$$p = (10e^{\frac{1}{2}\pi i + 2k\pi i})^{\frac{1}{2}}$$

$$p = 10e^{\frac{1}{4}\pi i + k\pi i}$$

De 2 oplossingen (omdat het  $z^2$  is) zijn nu :

$$k = 0 \rightarrow p_1 = 10e^{\frac{1}{4}\pi i + 0\pi i} = 10e^{\frac{1}{4}\pi i} \rightarrow z_1 = p_1 + 3i = 10e^{\frac{1}{4}\pi i} + 3i$$

$$k = 1 \rightarrow p_2 = 10e^{\frac{1}{4}\pi i + 1\pi i} = 10e^{\frac{5}{4}\pi i} \rightarrow z_2 = p_2 + 3i = 10e^{\frac{5}{4}\pi i} + 3i$$

- c. Bij deze vergelijking gaan we eerst kwadraat afsplitsen

(1) Kwadraat afsplitsen

$$z^2 + 2z + 3 = -2i$$

$$(z + 1)^2 + 2 = -2i$$

$$(z + 1)^2 = -2 - 2i$$

(2)  $-2 - 2i$  omzetten in Eulernotatie

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\varphi = \text{Angle}(-2 - 2i) = -\frac{3}{4}\pi$$

$$z = r \cdot e^{i\varphi} = 2\sqrt{2} \cdot e^{-\frac{3}{4}\pi i + 2k\pi i}$$

(3) We gaan  $p = z + 1$  stellen

$$p^2 = 2\sqrt{2} \cdot e^{-\frac{3}{4}\pi i + 2k\pi i}$$

$$p = (2\sqrt{2} \cdot e^{-\frac{3}{4}\pi i + 2k\pi i})^{\frac{1}{2}}$$

$$p = 2 \cdot e^{-\frac{3}{8}\pi i + k\pi i}$$

De 2 oplossingen (omdat het  $z^2$  is) zijn nu :

$$k = 0 \rightarrow p_1 = 2 \cdot e^{-\frac{3}{8}\pi i + 0\pi i} = 2 \cdot e^{-\frac{3}{8}\pi i} \rightarrow z_1 = p_1 - 1 = 2 \cdot e^{-\frac{3}{8}\pi i} - 1$$

$$k = 1 \rightarrow p_2 = 2 \cdot e^{-\frac{3}{8}\pi i + 1\pi i} = 2 \cdot e^{\frac{5}{8}\pi i} \rightarrow z_2 = p_2 - 1 = 2 \cdot e^{\frac{5}{8}\pi i} - 1$$