PARAGRAAF 10.1 : REKENEN MET COMPLEXE GETALLEN

LES 1 VERZAMELINGEN EN KWADRAAT AFSPLITSEN

DEFINITIES VERZAMELINGEN

Er zijn verschillende verzamelingen getallen :

(1) N = Natuurlijke getallen = 1,2,3,.....

(2) Z = Gehele getallen = … ,-3,-2,-1,0,1,2,3,.....

(3) Q = Rationale getallen (breuken) = Z en ½, -1 ¾ , etc…

(4) R = Reële getallen = Q en √7,π, -$\sqrt[3]{328}$, etc

(5) C = Complexe getallen = R en alles van de vorm a+bi

THEORIE COMPLEXE GETALLEN

(1) Complexe getallen zijn getallen van de vorm $z = a + bi$ met $i^2 = -1$.

(2) Voorbeelden zijn $3 + 4i$, $10 - 2i$, maar ook -$3i$ $(= 0 - 3i)$ of 4 $(= 4 + 0i)$

STAPPENPLAN KWADRAAT AFSPLITSEN

(i) Schrijf $(x + \frac{1}{2}b)^2$ uit.

(ii) Vul dit in de opgave in en los de vergelijking op.

VOORBEELD 1

Los de vergelijking $x^2 + 8x - 20 = 0$ op met kwadraat afsplitsen.

OPLOSSING 1

(i) $(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$

(ii) Vul in en los de vergelijking op.

$x^2 + 8x - 20 = 0$

$x^2 + 8x + 16 - 36 = 0$

$(x + 4)^2 - 36 = 0$

$(x + 4)^2 = 36$

$x + 4 = 6 \ v \ x + 4 = -6$

$x = 2 \ v \ x = -10$

VOORBEELD 2

Los de vergelijkingen op. Maak gebruik van $i^2 = -1$

a. $x^2 + 4x + 9 = 0$

b. $x^2 - 5x + 16¼ = 0$

OPLOSSING 2

a. Eerst het kwadraat afsplitsen :

(i) $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$

(ii) $x^2 + 4x + 9 = 0$

$x^2 + 4x + 4 + 5 = 0$

$(x+2)^2 + 5 = 0$

$(x+4)^2 = -5 = 5i^2$

$x + 2 = \sqrt{5}\, i \quad v \quad x + 2 = -\sqrt{5}\, i$

$x = -2 + \sqrt{5}\, i \quad v \quad x = -2 - \sqrt{5}\, i$

b. (i) $(x - 2\frac{1}{2})^2 = x^2 - 5x + 6¼$

(ii) $x^2 - 5x + 16¼ = 0$

$x^2 - 5x + 6¼ + 10 = 0$

$(x - 2\frac{1}{2})^2 + 10 = 0$

$(x - 2\frac{1}{2})^2 = -10 = 10i^2$

$x - 2½ = \sqrt{10}i \quad v \quad x - 2½ = -\sqrt{10}i$

$x = 2\frac{1}{2} + \sqrt{10}i \quad v \quad x = 2\frac{1}{2} - \sqrt{10}i$

LES 2 : REKENEN MET COMPLEXE GETALLEN

DEFINITIE GECONJUNGEERDE

$\bar{z} =$ { geconjungeerde van z }

Als $z = a + bi$ dan is $\bar{z} = a - bi$

VIER BEWERKINGEN

Er zijn vier bewerkingen die we uitleggen aan de hand van een voorbeeld.

VOORBEELD 1

(1) Plus $(3 + 4\mathrm{i}) + (5 + 7\mathrm{i}) = 8 + 11\mathrm{i}$

(2) Min $(3 + 4\mathrm{i}) - (5 + 7\mathrm{i}) = -2 - 3\mathrm{i}$

(3) Keer $(3 + 4\mathrm{i}) \cdot (5 + 7\mathrm{i}) =$

$15 + 21\mathrm{i} + 20\mathrm{i} + 28i^2 = 15 + 41\mathrm{i} - 28 = -13 + 41\mathrm{i}$

(4) Delen $\frac{3+4i}{5+7i} = \frac{3+4i}{5+7i} \times \frac{5-7i}{5-7i} = \frac{15-21i+20i-28i^2}{25-49i^2} = \frac{15-1i+28}{25+49} = \frac{43-i}{74} = \frac{43}{74} - \frac{1}{74}i$

PARAGRAAF 10.2 : HET COMPLEXE VLAK

LES 1 : TEKENEN IN HET COMPLEXE VLAK

EEN AANTAL BEGRIPPEN BIJ DE COMPLEXE VECTOR Z

Gegeven is het complexe getal $z = 1 + 2i$. Een aantal begrippen / definities :

(1) | z | = {Modulus van z} = $\sqrt{a^2 + b^2}$ = { Lengte van de vector / straal van de cirkel }

VOORBEELD

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

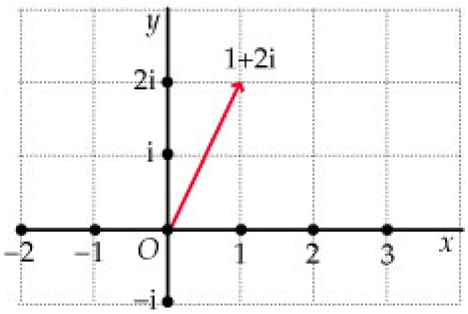
(2) Re (z) = a en Im (z) = b

VOORBEELD

$Re\ (1 + 2i) = 1$

$Im\ (1 + 2i) = 2$

(3) Tekenen van $z = 1 + 2i$



(4) Arg (z) = { Het argument van z } = { Hoek met de positieve x-as }

VOORBEELD

$Arg\ (1 + i) = 45°\ want\ tan\ \alpha = \frac{1}{1}\ dus\ \alpha = 45°$

VOORBEELD 1

Teken de volgende figuren

a. $Im\ (z)\ =\ 3$

b. $Im(z)\ +\ Re\ (z)\ =\ 4$

c. $|\ z\ |\ =\ 2$

d. $|\ z - 1 - 2i\ |\ =\ 3$

e. $45° \leq Arg \leq 90°$

OPLOSSING 1

a. Im (z) = 3 → y = 3

b. Im(z) + Re (z) = 4 → x + y = 4 → y = 4 - x

c. | z | = 2 → $\sqrt{a^2 + b^2} = 2 \rightarrow a^2 + b^2 = 2^2$ (dit is een cirkel met straal 2)

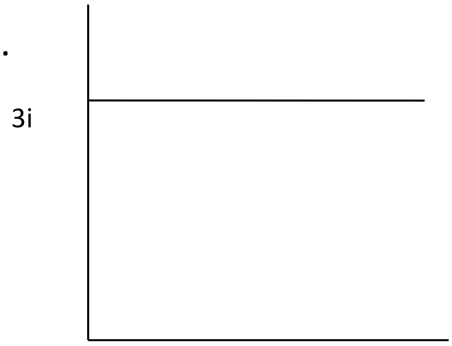
d. | z – 1 – 2i | = 3 → $\sqrt{a^2 + b^2} = 3 \rightarrow a^2 + b^2 = 3^2$ (dit is een cirkel met straal 3 en middelpunt 1 + 2i)

e. 45∘ ≤ Arg ≤ 90∘ (hoek tussen 45 en 90 graden)

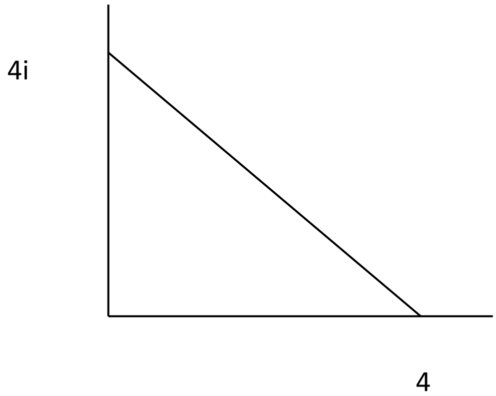
Voor de tekeningen zie de volgende pagina !!!

TEKENINGEN 1

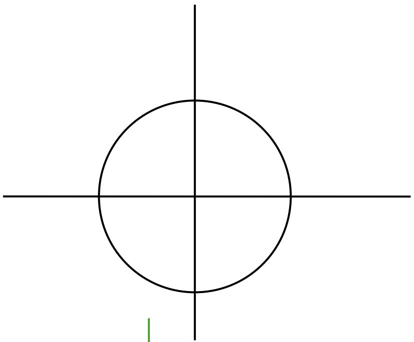
a.



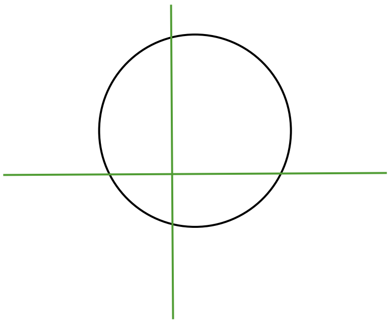
b.



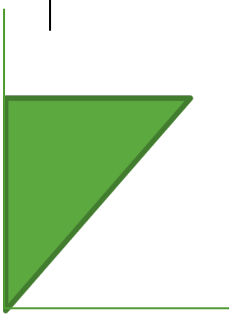
c.



d.



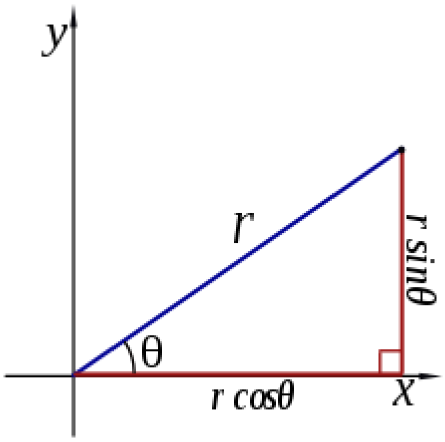
e.



PARAGRAAF 10.3 : POOLCOÖRDINATEN EN DE FORMULE VAN EULER

LES 1 : POOLCOÖRDINATEN

THEORIE COMPLEXE GETALLEN



(1) Er geldt : $\sin(\theta) = \frac{y\text{−}coordinaat}{r}$ $dus\ y = r \cdot \sin(\theta)$

(2) Zo ook : $\cos(\theta) = \frac{x\text{−}coordinaat}{r}$ $dus\ x = r \cdot \cos(\theta)$

(3) In het complexe vlak :

$$z = x + iy = r \cdot \cos(\theta) + ir \cdot \sin(\theta) = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

(4) Je kunt ze als volgt berekenen

- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$ (en let op kwadrant en -180 ≤ θ ≤ 180)

VOORBEELD 1

Schrijf als poolcoördinaat :

a. $z = 1 + i$

b. $z = 1 - \sqrt{3}\, i$

c. $z = -3 + 2i$

OPLOSSING 1

a. $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\tan(\theta) = \frac{1}{1} \rightarrow \theta = 45°$

Dus $z = x + iy = \sqrt{2}(\cos(45) + i\sin(45))$

b. $r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$

$\tan(\theta) = \frac{-\sqrt{3}}{1} \rightarrow \theta = -60°$

Dus $z = x + iy = 2(\cos(-60) + i\sin(-60))$

c. $r = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{11}$

Je kunt nu ook met de knop Angle werken. Dit gaat als volgt :

- Mode → Real ⇨ a+bi
- Catalog (2nd 0) → Angle (-3+2i) = 146 $\rightarrow \theta = 146°$

Dus $z = x + iy = \sqrt{2}(\cos(146) + i\sin(146))$

LES 2 DE FORMULE VAN EULER

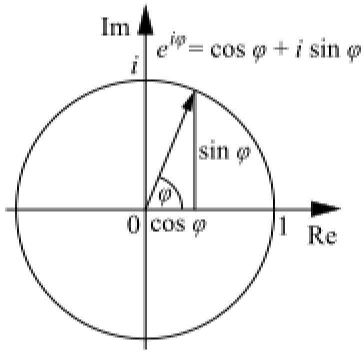
NOTATIE COMPLEX GETAL

Je kunt complexe getallen op 3 manieren schrijven :

(1) Standaardvorm $z = a + bi$

$a = Re(z)$

$b = Im(z)$



(2) Poolcoördinaten $z = r(cos(\varphi) + i\,sin\,(\varphi))$

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\tan(\varphi) = \frac{a}{b}$ (of met Angle op de GR)

(3) Formule van Euler $z = r \cdot e^{i\varphi} = r(cos(\varphi) + i\,sin\,(\varphi))$

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\tan(\varphi) = \frac{a}{b}$ (of met Angle op de GR)

VOORBEELD 1

Schrijf in de vorm z = a + bi

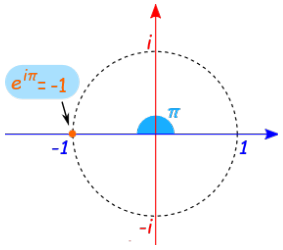
a. $e^{\pi i}$

b. $e^{2+\frac{3}{4}\pi i}$

OPLOSSING 1

a. $e^{\pi i} = cos(\pi) + \ i \sin(\pi) = -1 + i \cdot 0 = -1$ (zie ook het plaatje)

Dus $a \ = \ -1$ en $b = 0$



b. $e^{2+\frac{3}{4}\pi i} = e^2 \cdot e^{\frac{3}{4}\pi i} = e^2 \cdot \left(cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + \ i\ sin\ \left(\frac{3}{4}\pi\right)\right) = e^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i\right)$

$e^{2+\frac{3}{4}\pi i} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}e^2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}e^2 i$ { Dus $a \ = = -\frac{1}{2}\sqrt{2}e^2$ en $b = \frac{1}{2}\sqrt{2}e^2 i$ }

VOORBEELD 2

Schrijf in de vorm $z = r \cdot e^{i\varphi}$

a. $z_0 = 1 + i$

b. $z_1 = 2 - 2i$

c. $z_2 = (2 - 2i)^4$

d. $z_3 = \frac{(2-2i)^4}{1+i}$

OPLOSSING 2

a. $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\varphi = Angle(1 + i) = \frac{1}{4}\pi$

Dus $z_0 = r \cdot e^{i\varphi} = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{1}{4}\pi i}$

b. $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\varphi = Angle(2 - 2i) = -\frac{1}{4}\pi$

Dus $z_1 = r \cdot e^{i\varphi} = 2\sqrt{2} \cdot e^{-\frac{1}{4}\pi i}$

c. $z_2 = (2 - 2i)^4 = (z_1)^4 = (2^{1\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{4}\pi i})^4 = 2^6 \cdot e^{-\pi i} = 64e^{-\pi i}$

d. $z_3 = \frac{(2-2i)^4}{1+i} = \frac{z_2}{z_0} = \frac{2^6 e^{-\pi i}}{\sqrt{2}e^{\frac{1}{4}\pi i}} = 2^{5\frac{1}{2}} \cdot e^{-1\frac{1}{4}\pi i}$

PARAGRAAF 10.4: VERGELIJKINGEN EN FUNCTIES

LES 1 VERGELIJKINGEN OPLOSSEN MET DE FORMULE VAN EULER

VOORBEELD 1

Los de volgende vergelijkingen op m.b.v. de formule van Euler.

a. $z^3 = 2 - 2i$

b. $(z - 3i)^2 = 10i$

c. $z^2 + 2z + 3 = -2i$

OPLOSSING 1

Vooraf een paar opmerkingen

- In het vorige voorbeeld hebben we al gezien dat $z = 2 - 2i = 2\sqrt{2} \cdot e^{-\frac{1}{4}\pi i}$
- Omdat een rondje verder dezelfde coördinaat oplevert, is de algemene oplossing

  $z = 2 - 2i = 2\sqrt{2} \cdot e^{-\frac{1}{4}\pi i + 2k\pi i}$ { met k het aantal rondjes dat John de Muis extra loopt }

a. $z^3 = 2 - 2i$

$z^3 = 2^{1\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{4}\pi i + 2k\pi i}$

$z = (2^{1\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{4}\pi i + 2k\pi i})^{\frac{1}{3}}$

$z = 2^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{12}\pi i + \frac{2}{3}k\pi i} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{12}\pi i + \frac{8}{12}k\pi i}$ { Dit is de algemene oplossing }

De 3 oplossingen (omdat het z^3 is) zijn nu :

$k = 0 \rightarrow$ $z_1 = 2^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{12}\pi i + \frac{8}{12} \cdot 0\pi i} = \sqrt{2} \cdot e^{-\frac{1}{12}\pi i}$

$k = 1 \rightarrow$ $z_2 = 2^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{12}\pi i + \frac{8}{12} \cdot 1\pi i} = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{7}{12}\pi i}$

$k = 2 \rightarrow$ $z_3 = 2^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{12}\pi i + \frac{8}{12} \cdot 2\pi i} = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{15}{12}\pi i}$

OPMERKING

z_4 is dezelfde oplossing als z_1 want :

$k = 3 \rightarrow$ $z_4 = 2^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{12}\pi i + \frac{8}{12} \cdot 3\pi i} = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{23}{12}\pi i} = \sqrt{2} \cdot e^{-\frac{1}{12}\pi i} = z_1$

b. $z = 10i = 10e^{\frac{1}{2}\pi i + 2k\pi i}$ { Want 10i ligt op de positieve y-as, dus hoek = $\frac{1}{2}\pi$ }

We gaan $z - 3i = p$ stellen { pency }

$p^2 = 10i$

$p^2 = 10e^{\frac{1}{2}\pi i + 2k\pi i}$

$p = (10e^{\frac{1}{2}\pi i + 2k\pi i})^{\frac{1}{2}}$

$p = 10e^{\frac{1}{4}\pi i + k\pi i}$

De 2 oplossingen (omdat het z^2 is) zijn nu :

$k = 0 \rightarrow$ $p_1 = 10e^{\frac{1}{4}\pi i + 0\pi i} = 10e^{\frac{1}{4}\pi i} \rightarrow z_1 = p_1 + 3i = 10e^{\frac{1}{4}\pi i} + 3i$

$k = 1 \rightarrow$ $p_2 = 10e^{\frac{1}{4}\pi i + 1\pi i} = 10e^{1\frac{1}{4}\pi i} \rightarrow z_2 = p_2 + 3i = 10e^{1\frac{1}{4}\pi i} + 3i$

c. Bij deze vergelijking gaan we eerst kwadraat afsplitsen

(1) Kwadraat afsplitsen

$$z^2 + 2z + 3 = -2i$$
$$(z+1)^2 + 2 = -2i$$
$$(z+1)^2 = -2 - 2i$$

(2) $-2 - 2i$ omzetten in Eulernotatie

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$
$$\varphi = Angle(-2 - 2i) = -\frac{3}{4}\pi$$
$$z = r \cdot e^{i\varphi} = 2\sqrt{2} \cdot e^{-\frac{3}{4}\pi i + 2k\pi i}$$

(3) We gaan $p = z + 1$ stellen

$$p^2 = 2\sqrt{2} \cdot e^{-\frac{3}{4}\pi i + 2k\pi i}$$
$$p = (2^{1\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{3}{4}\pi i + 2k\pi i})^{\frac{1}{2}}$$
$$p = 2^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{3}{8}\pi i + k\pi i}$$

De 2 oplossingen (omdat het z^2 is) zijn nu :

$k = 0 \rightarrow$ $p_1 = 2^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{3}{8}\pi i + 0\pi i} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{3}{8}\pi i} \rightarrow z_1 = p_1 - 1 = 10e^{\frac{1}{4}\pi i} - 1$

$k = 1 \rightarrow$ $p_2 = 2^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{3}{8}\pi i + 1\pi i} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{5}{8}\pi i} \rightarrow z_2 = p_2 - 1 = 2^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{5}{8}\pi i} - 1$