

PARAGRAAF 1.2 STELSLS OPLOSSEN

LES 1 : STELSLS OPLOSSEN EN ECHELON VORM (PAR 1.2)

THEORIE

- (1) Stelsel = { Een aantal vergelijkingen die bij elkaar horen }
 (2) Vegen / Eliminatie = { Vergelijkingen bij elkaar optellen/afrekken }
 (3) Echelon-vorm = { In iedere vergelijking een variabele minder }

VOORBEELD 1

Los het volgende stelsel op :
$$\begin{cases} x + 3y - 4z = -5 \\ 2x + 2y + 5z = 21 \\ -x + 4y - 7z = -14 \end{cases}$$
 op m.b.v. de echelon-vorm.

OPLOSSING1

- (1) Zorg ervoor dat in rij 2 (R2) en rij 3 (R3) geen x meer staat. Dit weghalen noemen ze vegen :

$$\begin{cases} x + 3y - 4z = -5 \\ 2x + 2y + z = 9 \\ -x + 4y - z = 4 \end{cases} \left| \begin{array}{l} R2 - 2 \cdot R1 \\ R3 + R1 \end{array} \right.$$

- (2) Zorg ervoor dat in rij 3 (R3) geen y meer staat :

$$\begin{cases} x + 3y - 4z = -5 \\ -4y + 9z = 19 \\ 7y - 5z = -1 \end{cases} \left| \begin{array}{l} 4 \cdot R3 + 7 \cdot R2 \end{array} \right.$$

(3) Deze vorm heet de **echelon-vorm**.

$$\begin{cases} x + 3y - 4z = -5 \\ -4y + 13z = 31 \\ 43z = 129 \end{cases}$$

(4) Dit stelsel kun je oplossen m.b.v. substitutie :

- Uit de onderste rij volgt : $43z = 129$ $\rightarrow z = 3$
- Uit de 2^e rij volgt : $-4y + 13 \cdot 3 = 31$ $\rightarrow y = 2$
- Uit de 1^e rij volgt : $x + 3 \cdot 2 - 4 \cdot 3 = -5$ $\rightarrow x = 1$

LES 2 : DRIE SOORTEN STELSELS (PAR 1.2)

THEORIE

Er zijn 3 soorten stelsels :

(1) Unieke

→ Er is precies één oplossing

(2) Consistente

→ Er zijn meerdere oplossingen. Er zijn één of meerdere gebonden variabelen

(3) Strijdig

→ Er is géén oplossing

VOORBEELD 2

(1) Het stelsel van vorige les is uniek (Oplossing $(x, y, z) = (1, 2, 3)$)

(2) Een voorbeeld van een consistent stelsel.

VOORBEELD

Los het volgende stelsel op:

$$\begin{cases} x + 2z = 0 \\ x + 3y - z = 3 \end{cases} \begin{array}{l} R2 - R1 \end{array}$$

$$\begin{cases} x + 2z = 0 \\ 3y - 3z = 3 \end{cases}$$

De oplossingen zijn :

$$x = -2z \quad \text{en}$$

$$3y = 3z + 3 \rightarrow y = z + 1$$

OPMERKINGEN

- Je ziet dat de oplossing van x en y afhankelijk is van z.
- Er zijn dus miljoenen oplossingen
- Ze noemen z de **gebonden variabele**

(3) Een voorbeeld van een strijdig stelsel.

$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$$

Dit stelsel is NIET op te lossen (strijdig).

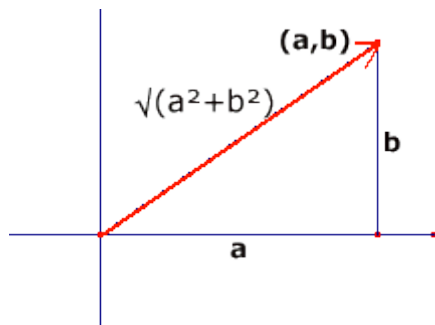
PARAGRAAF 1.5 VECTOREN, LIJNEN EN VLAKKEN

LES 1 : VECTOREN BEPALEN EN TEKENEN

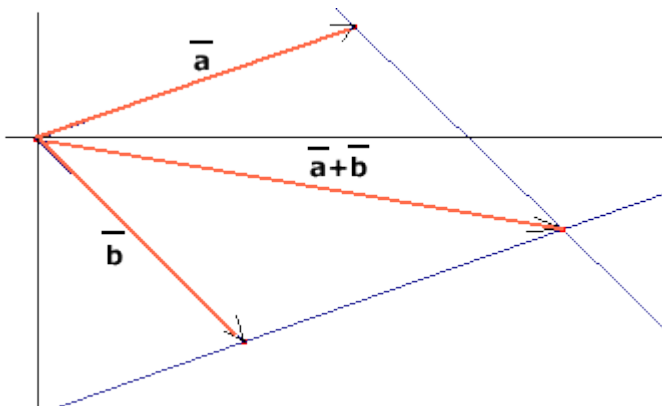
DEFINITIES

(1) Vector $x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ wil zeggen a naar rechts en b omhoog.

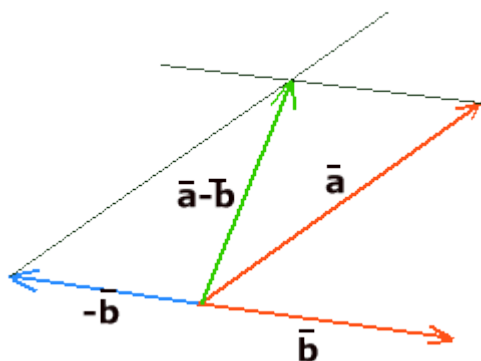
(2) Lengte van vector : $|x| = \sqrt{a^2 + b^2}$



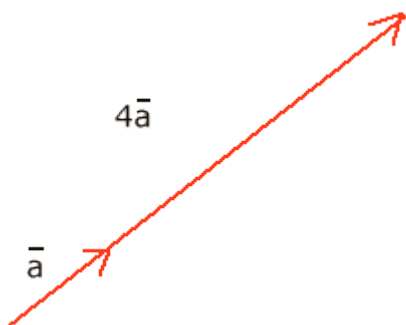
(3) Optellen van vectoren : $\vec{a} + \vec{b}$



(4) Aftrekken van vectoren : $\vec{a} - \vec{b}$



(5) Vermenigvuldigen van vectoren : $4 \cdot \vec{a}$



VOORBEELD 1

Neem de vectoren $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ en $w = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Teken ze in een assenstelsel.
- Teken ook $2v$, $v + w$ en $v - w$.
- Bereken ook $2v$, $v + w$ en $v - w$

OPLOSSING 1

- Zelf tekenen
- Zelf tekenen
- $2v = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$; $v + w = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$; $v - w = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

LES 2 : EEN VECTORVOORSTELLING MAKEN

VECTORVOORSTELLING VAN EEN LIJN

- (1) Vectorvoorstelling van een lijn = { lijn uitgedrukt in vectoren }
- (2) Vectorvoorstelling = steunvector + $\alpha \cdot$ richtingsvector
- (3) Steunvector = \bar{b}
- (4) Richtingsvector lijn $l = r_l = \bar{a} - \bar{b}$ (of $\bar{b} - \bar{a}$)

VECTORVOORSTELLING VAN EEN VLAK

- Een vlak bestaat uit één steunvector en twee richtingsvectoren (r_1 en r_2)
- Dus $V = s + \alpha \cdot r_1 + \beta \cdot r_2$.

VOORBEELD 1

Neem zijn de punten $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ en $W = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Stel een vectorvoorstelling op van de lijn l door de punten V en W .
- Bepaal het snijpunt met de y -as van lijn l .

Vlak V gaat door de punten $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $R = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- Stel de vectorvoorstelling van vlak V op.
- Bereken het snijpunt met de x -as.

OPLOSSING 1

a. Steunvector = $W = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ en Richtingsvector = $V - W = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Vectorvoorstelling: $l = w + \alpha (v - w) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2\alpha \\ 1 - 3\alpha \end{pmatrix}$

b. Snijpunt y-as, dan is de $x = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 3 - 2\alpha \\ 1 - 3\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \end{pmatrix}$

$3 - 2\alpha = 0 \rightarrow \alpha = 1,5$
 $\rightarrow l = \begin{pmatrix} 3 - 2 \cdot 1\frac{1}{2} \\ 1 - 3 \cdot 1\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

c. $r_1 = Q - P = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$r_2 = R - P = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Vlak V : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

d. Snijpunten x-as $\rightarrow y = 0$ en $z = 0$

$z = 0 \rightarrow 3 - 2\alpha = 0 \rightarrow \alpha = 1\frac{1}{2}$

$y = 0 \rightarrow 2\alpha + 2\beta = 0 \rightarrow \beta = -\alpha = -1\frac{1}{2}$

Nu kun je de x berekenen : $x = 1 + 4\alpha + 3\beta = 1 + 4 \cdot 1\frac{1}{2} + 3 \cdot -1\frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$

Dus snijpunt $(2\frac{1}{2}, 0, 0)$

PARAGRAAF 1.8 : BASIS, DIMENSIE EN (ON)AFHANKELIJKHEID

THEORIE

- (1) Eenheidsvector = { Vector met één 1 en de rest nullen }
- (2) Basis = { Een aantal onafhankelijke vectoren waarmee je de ruimte kunt maken / opspannen }
- (3) Standaardbasis = { Basis die alleen bestaat uit eenheidsvectoren }
- (4) Dimensie = { het aantal vectoren in de basis van een ruimte V }

VOORBEELD 1

- In het platte vlak (\mathbb{R}^2) is de standaardbasis : $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- In de ruimte (\mathbb{R}^3) is de standaardbasis : $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- In het platte vlak (\mathbb{R}^2) is een andere mogelijke basis : $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

DEFINITIE ONAFHANKELIJKHEID

- (1) De vectoren v_1, v_2, \dots, v_n in een vectorruimte over K heten **onafhankelijk**, indien voor willekeurige getallen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ geldt
- $$\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \dots + \alpha_n \cdot v_n = 0 \rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$
- (2) Als de vectoren niet lineair onafhankelijk zijn, heten ze **afhankelijk**.

DEFINITIE ONAFHANKELIJKHEID

Als de vector a te schrijven is als een lineaire combinatie van andere vectoren, zeg b en c , dan zijn de vectoren a , b en c afhankelijk.

DEFINITIE DIMENSIE

De dimensie van de vectorruimte is gelijk aan het maximaal aantal lineair onafhankelijke vectoren.

VOORBEELD 1

De ruimte V wordt gemaakt door de vectoren $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $q = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- Toon aan dat de vectoren p en q onafhankelijk zijn.
- Bepaal een basis van V .
- Bepaal de dimensie van V .
- Geef de standaardbasis van V .

OPLOSSING 1

- Om na te gaan of ze lineair afhankelijk zijn stellen we een lineaire combinatie van de twee vectoren gelijk aan de nulvector.

$$(1) \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(2) \text{ Uit de 2}^{\text{e}} \text{ vergelijking volgt :} \quad 2\beta = 0 \text{ dus } \beta = 0.$$

$$(3) \text{ Vul } \beta = 0 \text{ in in de 1}^{\text{e}} \text{ vergelijking :} \quad \alpha - \beta = 0 \text{ dus } \alpha = 0$$

(4) De coëfficiënten zijn beiden 0, dus de vectoren zijn lineair onafhankelijk.

- Er zijn twee onafhankelijke vectoren p en q dus : $V = \langle p, q \rangle$
- $\dim(V) = 2$ (p en q)
- $V = \langle e_1, e_2 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

VOORBEELD 2

De ruimte W wordt gemaakt door de vectoren $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ $q = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $r = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ in \mathbb{R}^3 .

- Bepaal of de vectoren p , q en r onafhankelijk zijn.
- Schrijf, indien mogelijk, de vector p als combinatie van q en r .
- Bepaal een basis van W
- Bepaal de dimensie van W .

OPLOSSING 2

- a. Om na te gaan of ze lineair afhankelijk zijn stellen we een lineaire combinatie van de drie vectoren gelijk aan de nulvector.

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1\alpha + 3\beta + 4\gamma = 0 \\ 0\alpha + 2\beta + 2\gamma = 0 \\ -2\alpha + 0\beta - 2\gamma = 0 \end{cases} \quad R3 + 2R1)$$

$$\begin{cases} 1\alpha + 3\beta + 4\gamma = 0 \\ 0\alpha + 2\beta + 2\gamma = 0 \\ 0\alpha + 6\beta + 6\gamma = 0 \end{cases} \quad R3 - 3R2$$

$$\begin{cases} 1\alpha + 3\beta + 4\gamma = 0 \\ 0\alpha + 2\beta + 2\gamma = 0 \\ 0\alpha + 0\beta + 0\gamma = 0 \end{cases}$$

Uit vergelijking (2) volgt dat : $\gamma = -\beta$

Uit vergelijking (1) volgt dan : $\alpha + 3\beta - 4\beta = 0 \rightarrow \alpha = \beta$

Een mogelijke oplossing is $\alpha = \beta = 1$ en $\gamma = -1$. Omdat ze niet 0 zijn, zijn de vectoren dus afhankelijk.

- b. Dat betekent dat de vector r te schrijven is als combinatie van p en q :

$$\alpha p + \beta q + \gamma r = 0$$

$$1p + 1q - 1r = 0$$

$$r = p + q$$

- c. De vector r is overbodig, dus $V = \langle p, q \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

OPMERKING

Als de vectoren onafhankelijk zouden zijn geweest, zou $V = \langle p, q, r \rangle$

- d. $\dim(V) = 2$ (p en q)

OPMERKING

Als de vectoren onafhankelijk zouden zijn geweest, zou $\dim(V) = 3$