PARAGRAAF 1.2 STELSELS OPLOSSEN

LES 1 : STELSELS OPLOSSEN EN ECHELON VORM (PAR 1.2)

THEORIE

- Stelsel = { Een aantal vergelijkingen die bij elkaar horen }
- Vegen / Eliminatie = { Vergelijkingen bij elkaar optellen/aftrekken }
- Echelon-vorm = { In iedere vergelijking een variabele minder }

VOORBEELD 1

Los het volgende stelsel op : $\begin{cases} x+3y-4z=-5 \\ 2x+2y+5z=21 \\ -x+4y-7z=-14 \end{cases}$

OPLOSSING1

(1) Zorg ervoor dat in rij 2 (R2) en rij 3 (R3) geen x meer staat. Dit weghalen noemen ze vegen :

$$\begin{cases} x+3y-4z=-5 \\ 2x+2y+z=9 \\ -x+4y-z=4 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \\ R3-2\cdot R1 \\ R3+R1 \end{array} \right.$$

(2) Zorg ervoor dat in rij 3 (R3) geen y meer staat :

$$\begin{cases} x+3y-4z=-5 \\ -4y+9z=19 \\ 7y-5z=-1 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \\ \\ 4\cdot R3+7\cdot R1 \end{array} \right.$$

(3) Deze vorm heet de **echelon-vorm.**:

$$\begin{cases} x+3y-4z=-5 \\ -4y+13z=31 \\ 43z=129 \end{cases} \Bigg|$$

(4) Dit stelsel kun je oplossen m.b.v. substitutie :

- Uit de onderste rij volgt : $43z = 129$ $\rightarrow z = 3$
- Uit de 2^e^ rij volgt : $-4y + 13 \cdot 3 = 31$ $\rightarrow y = 2$
- Uit de 1^e^ rij volgt : $x + 3 \cdot 2 - 4 \cdot 3 = -5$ $\rightarrow x = 1$

LES 2 : DRIE SOORTEN STELSELS (PAR 1.2)

THEORIE

Er zijn 3 soorten stelsels :

(1) Unieke
→ Er is precies één oplossing
(2) Consistente
→ Er zijn meerdere oplossingen. Er zijn één of meerdere gebonden variabelen
(3) Strijdig
→ Er is géén oplossing

VOORBEELD 2

(1) Het stelsel van vorige les is uniek (Oplossing $(x, y, z) = (1,2,3)$)

(2) Een voorbeeld van een consistent stelsel.

VOORBEELD

Los het volgende stelsel op:

$$\begin{cases} x \qquad + 2z = 0 \\ x + 3y - z = 3 \end{cases} \Big|_{R2 - R1}$$

$$\begin{cases} x \qquad + 2z = 0 \\ \quad 3y - 3z = 3 \end{cases}$$

De oplossingen zijn :

$x = -2z$ en

$3y = 3z + 3 \ \rightarrow y = z + 1$

Opmerkingen

- Je ziet dat de oplossing van x en y afhankelijk is van z.
- Er zijn dus miljoenen oplossingen
- Ze noemen z nu de **gebonden variabele**

(3) Een voorbeeld van een strijdig stelsel.

$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$$

Dit stelsel is NIET op te lossen (strijdig).

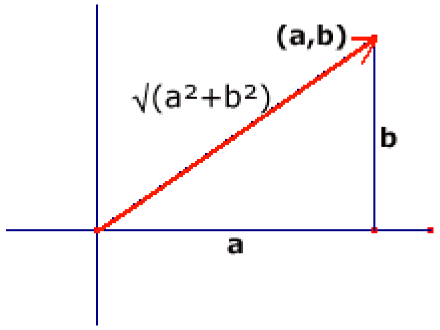
PARAGRAAF 1.5 VECTOREN, LIJNEN EN VLAKKEN

LES 1 : VECTOREN BEPALEN EN TEKENEN

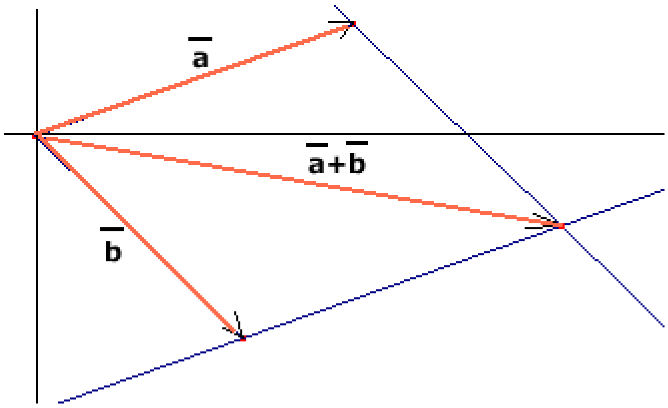
DEFINITIES

(1) Vector $x = \binom{a}{b}$ wil zeggen a naar rechts en b omhoog.

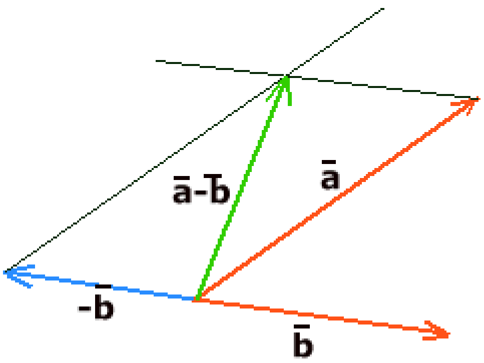
(2) Lengte van vector : $|x| = \sqrt{a^2 + b^2}$



(3) Optellen van vectoren : $\bar{a} + \bar{b}$



(4) Aftrekken van vectoren : $\bar{a} - \bar{b}$

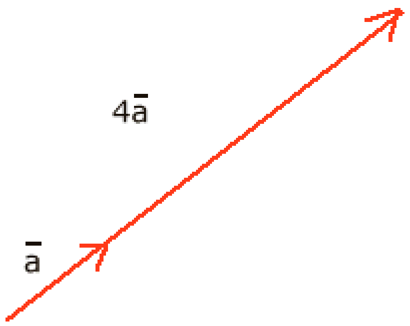


(5) Vermenigvuldigen van vectoren : $\mathbf{4 \cdot \bar{a}}$

VOORBEELD 1

Neem de vectoren $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ en w = $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

a. Teken ze in een assenstelsel.
b. Teken ook 2v, v + w en v - w .
c. Bereken ook 2v, v + w en v - w



OPLOSSING 1

a. Zelf tekenen
b. Zelf tekenen
c. $2v = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$; $v + w = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$; $v - w = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

LES 2 : EEN VECTORVOORSTELLING MAKEN

VECTORVOORSTELLING VAN EEN LIJN

(1) Vectorvoorstelling = { vergelijking van de lijn in vectoren uitgedrukt }
(2) Vectorvoorstelling = steunvector + α · richtingsvector
(3) Steunvector = $\bar{b}$
(4) Richtingsvector = $\bar{a} - \bar{b}$

VECTORVOORSTELLING VAN EEN VLAK

- Een vlak bestaat uit één steunvector en twéé richtingsvectoren (r_1 en r_2)
- Dus V = s + α $\cdot r_1$ + β $\cdot r_2$.

VOORBEELD 1

Neem zijn de punten *V* = $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ en *W* = $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

a. Stel een vectorvoorstelling op van de lijn *l* door V en W.
b. Bepaal het snijpunt met de y-as van lijn l.

Vlak V gaat door de punten $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $Q = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $en\ R = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

c. Stel de vergelijking van vlak V op.
d. Bereken de snijpunten met de x-as.

OPLOSSING 1

a. Steunvector = W = $\binom{3}{1}$ en Richtingsvector = V – W = $\binom{-2}{-3}$

Vectorvoorstelling: l = w + α (v – w) = $\binom{3}{1} + \alpha\binom{-2}{-3} = \binom{3-2\alpha}{1-3\alpha}$

b. Snijpunt y-as, dan is de x = 0 → $\binom{3-2\alpha}{1-3\alpha} = \binom{0}{\ldots}$

3 - 2α = 0 → α = 1,5 → l = $\begin{pmatrix} 3-2\cdot 1\frac{1}{2} \\ 1-3\cdot 1\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

c. $r_1 = Q - P = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$r_2 = R - P = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Vlak V : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

d. Snijpunten x-as → $y = 0\ en\ z = 0$

$z = 0 \rightarrow 3 - 2\alpha = 0 \rightarrow \alpha = 1\frac{1}{2}$

$y = 0 \rightarrow 2\alpha + 2\beta = 0 \rightarrow \beta = -\alpha = -1\frac{1}{2}$

Nu kun je de x berekenen : $x = 1 + 4\alpha + 3\beta = 1 + 4\cdot 1\frac{1}{2} + 3\cdot -1\frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$

Dus snijpunt $(2\frac{1}{2}, 0, 0)$

PARAGRAAF 1.8 : BASIS EN DIMENSIE

THEORIE

(1) Eenheidsvector = { Vector met één 1 en de rest nullen }
(2) Basis = { Een aantal onafhankelijke vectoren waarmee je de ruimte kunt maken / opspannen }
(3) Standaardbasis = { Basis die alleen bestaat uit eenheidsvectoren }
(4) Dimensie = { het aantal vectoren in de basis van een ruimte V }

VOORBEELD 1

- In het platte vlak ($\mathbb{R}^2$) is de <u>standaardbasis</u> : $e_1 = (1,0)$ en $e_2 = (0,1)$
- In de ruimte ($\mathbb{R}^3$) is de <u>standaardbasis</u> : $e_1 = (1,0,0)$ en $e_2 = (0,1,0)$ en $e_3 = (0,0,1)$
- In het platte vlak ($\mathbb{R}^2$) is een andere basis : $a = (1,1)$ en $b = (2,1)$

DEFINITIE ONAFHANKELIJKHEID

(1) De vectoren $v_1, v_2, \dots, v_n$ in een vectorruimte over K heten ***onafhankelijk***, indien voor willekeurige getallen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ geldt

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \ \dots = \alpha_n = 0$$

(2) Als de vectoren niet lineair onafhankelijk zijn, heten ze ***afhankelijk***.

DEFINITIE DIMENSIE

De dimensie van de vectorruimte is gelijk aan het maximaal aantal lineair onafhankelijke vectoren.

VOORBEELD 1

De ruimte V wordt gemaakt door de vectoren $p = \binom{1}{0}$ en $q = \binom{-1}{2}$.

a. Toon aan dat deze onafhankelijk zijn.
b. Bepaal een basis van V.
c. Bepaal de dimensie van V.

OPLOSSING 1

a. Om na te gaan of ze lineair afhankelijk zijn stellen we een lineaire combinatie van de twee vectoren gelijk aan de nulvector.

(1) $\alpha \binom{1}{0} + \beta \binom{-1}{2} = \binom{0}{0}$

(2) Uit de 2e vergelijking volgt : $2\beta = 0\ dus\ \beta = 0.$

(3) Vul $\beta = 0$ in in de 1e vergelijking : $\alpha - \beta = 0$ dus $\alpha = 0$

(4) De coëfficiënten zijn beiden 0, dus de vectoren zijn lineair onafhankelijk.

b. Er zijn twee onafhankelijke vectoren p en q dus : V = < p , q >
c. Dim (V) = 2 (p en q)

VOORBEELD 2

De ruimte W wordt gemaakt door de vectoren $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ $q = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $r = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ in $\mathbf{R}^3$.

a. Bepaal of deze onafhankelijk zijn.
b. Bepaal een basis van W
c. Bepaal de dimensie van W

OPLOSSING 2

a. Om na te gaan of ze lineair afhankelijk zijn stellen we een lineaire combinatie van de drie vectoren gelijk aan de nulvector.

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}4\\2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}1\alpha+3\beta+4\gamma=0\\0\alpha+2\beta+2\gamma=0\\-2\alpha+0\beta-2\gamma=0\end{cases}\Bigg|\; R3+2R1)$$

$$\begin{cases}1\alpha+3\beta+4\gamma=0\\0\alpha+2\beta+2\gamma=0\\0\alpha+6\beta+6\gamma=0\end{cases}\Bigg|\; R3-3R2$$

$$\begin{cases}1\alpha+3\beta+4\gamma=0\\0\alpha+2\beta+2\gamma=0\\0\alpha+0\beta+0\gamma=0\end{cases}\Bigg|$$

Uit vergelijking (2) volgt dat : γ = - β
Uit vergelijking (1) volgt dan : α +3β -4β = 0 → α = β

Een mogelijke oplossing is α = β = 1 en γ = -1. Omdat ze niet 0 zijn, zijn de vectoren dus afhankelijk.

Dat betekent dat de vector r te schrijven is als combinatie van p en q :
$\alpha p+\beta q+\gamma r=0\ \rightarrow 1p+1q-1r=0 \rightarrow r=p+q$

b. De vector r is overbodig, dus V = < p , q > = < $\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$ >

OPMERKING

Als de vectoren onafhankelijk zouden zijn geweest, zou V = < p , q , r >

c. Dim (V) = 2 (p en q)

OPMERKING

Als de vectoren onafhankelijk zouden zijn geweest, zou Dim (V) = 3