# PARAGRAAF 1.0 : VERZAMELINGENLEER

## LES 1 VERZAMELINGEN

Er zijn een verschillende verzamelingen getallen gedefinieerd in de wiskunde. De bekendste zijn

- $\mathbb{N} =$ { Natuurlijke getallen } = {0,1,2,3,4,...}
- $\mathbb{R} =$ { Reële getallen } = { alle mogelijke getallen dus ook 3,246, $\pi$ en $\sqrt{3}$
- $\emptyset =$ { de lege verzameling }

Soms wil je slechts een deel bekijken. Dit doe je door de verzameling te definiëren. Dat kun je op twee manieren doen :

**(1)** Met accolades

Gebruik je als er een beperkt aantal mogelijkheden zijn.

Bijv. $A = \{1,2,3\}$

$B = \{3,11,12,17\}$

**(2)** Een voor- en achterdefinitie

Gebruik je als je een interval wilt aangeven.

Bijv. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$ (alle getallen kleiner dan 5)

$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 > 10\}$ ( = { 4,5,6,...} )

### BEWERKINGEN OP VERZAMELINGEN

Je kunt ook een aantal bewerkingen uitvoeren. We bekijken deze met de verzamelingen $A = \{1,2,3\}$ en $B = \{3,11,12,17\}$. Deze bewerkingen zijn :

**(1) Doorsnede ∩**

Wat zit er in beide verzamelingen

Bijv. A ∩ B = { 3 }

**(2) Vereniging ∪**

Welke elementen heb je samen in beide verzamelingen

Bijv. A ∪ B = { 1,2,3,11,12,17 }

**(3) Verschil **

Welke elementen zitten wel in de eerste maar niet in de tweede

Bijv. A \ B = { 1,2 } en B \ A = { 11,12,17 }

**(4) Deelverzameling ⊂**

Is de eerste verzameling een deel van de tweede.

Bijv. A ⊂ B → Niet waar. Dan zouden alle elementen van A in B moet zitten

Bijv. A ⊂ ℕ → Waar. Alle elementen van A zitten in ℕ

**(5) Product ×**

Pak een element uit A en een element uit B (coördinaat)

Bijv. A × {4,5} → (1,4), (1,5), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5),

## VOORBEELD 1

Gegeven zijn de verzamelingen $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x < 7\}$ $B = \{1,3,5,7,9\}$ $C = \{4,5,6,7\}$

Bereken

**a.** $A \cap B$

**b.** $B \cup \emptyset$

**c.** $B \subset \mathbb{N}$

**d.** $A / B$

**e.** $A / (B \cap C)$

**f.** $(A \cap B) \times (A/B)$

## OPLOSSING 1

Vooraf : Bedenk de de verzameling A ook geschreven kan worden als $A = \{3,4,5,6\}$

**a.** $A \cap B = \{3,5\}$

**b.** $B \cup \emptyset = B = \{1,3,5,7,9\}$

**c.** $B \subset \mathbb{N}$. Waar want alle elementen van B zitten in ℕ.

**d.** $A/B = \{4,6\}$

**e.** $(B \cap C) = \{5,7\}$

$A / (B \cap C) = \{3,4,6\}$

**f.** $(A \cap B) \times (A/B)$ = (3,4), (3,6), (5,4),(5,6)

## PARAGRAAF 1.1 : DE SOM EN DE PRODUCTREGEL

### LES 1 VERSCHILLENDE MANIEREN VOOR TELLEN MOGELIJKHEDEN

#### VOORBEELD 1

Jan gaat eten bij de Merode. Hij kan kiezen uit

- 2 voorgerechten : soep of cocktail
- 3 hoofdgerechten : vis of bief of kip
- 2 nagerechten : ijs of gebak.

Hoeveel verschillende menu's kan Jan eten ?

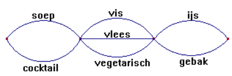
#### DEFINITIES

Er zijn een aantal manieren om telproblemen weer te geven.

**1.** Boomdiagram :


2 x 3 x 2 = 12 mogelijkheden

**2.** Wegendiagram




2 x 3 x 2 = 12 mogelijkheden

**3.** Systematisch tellen : Zet de eerste keuze vast (onderstrepen) en bepaal de rest erna

| | |
|---|---|
| SVG | CVG |
| SVY | CVY |
| SBG | CBG |
| SBY | CBY |
| SKG | CKG |
| SKY | CKY |

**4.** Rooster (Werkt goed bij twee keuzes)

## VOORBEELD 2

Je gooit met twee dobbelstenen. Bereken op hoeveel manieren je 9 ogen komt gooien.

## OPLOSSING 2

Maak een rooster :

dobbelsteen 1

| dobbelsteen 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

Je ziet dat er 4 mogelijkheden zijn.

## VOORBEELD 3

Bereken het aantal mogelijkheden als :

**a.** Jan na 4 sets wint met tennis van Piet.

**b.** Je met 2 dobbelstenen 8 gooit

**c.** Wim met drie dobbelstenen minstens 17 gooit.

## OPLOSSING 3

**a.** PJJJ / JPJJ / JJPJ → 3 mogelijkheden

**b.** 26 / 35 / 44 / 53 / 62 → 5 mogelijkheden (Laat ook rooster zien)

**c.** Minstens 17 → 17 of 18

| | | |
|---|---|---|
| 18 | → 666 | → 1 mogelijkheid |
| 17 | → 566 of 656 of 665 | → <u>3 mogelijkheden</u> + |
| Dus minstens 17 ogen | | = 4 mogelijkheden |

## LES 2 DE SOM EN DE PRODUCTREGEL

### VOORBEELD 1

In de volgende tabel staat de verdeling jongens-meisjes van de klassen 4, 5 en 6 op een scholengemeenschap.

| | klas 4 | klas 5 | klas 6 | totaal |
|---|---|---|---|---|
| Jongen | 45 | 42 | 38 | 125 |
| Meisje | 5 | 12 | 18 | 35 |
| totaal | 50 | 54 | 56 | 160 |

Je kiest uit iedere klas één leerling. Bereken het aantal mogelijkheden als:

**a.** Je 3 jongens kiest.

**b.** Je precies twee meisjes kiest.

**c.** Je uit klas 5 een jongen kiest.

### OPLOSSING 1

**a.** JJJ → 45 x 42 x 38 = 71820

**b.** MMJ → 5 x 12 x 38 = 2280

MJM → 5 x 42 x 18 = 3780

JMM → 45 x 12 x 18 = 9720 +

Totaal = 15780

**c.** ?J? → 50 x 42 x 56 = 117600

## PARAGRAAF 1.2 : VARIATIES EN HERHALINGSVARIATIES

### LES 1 MET OF ZONDER HERHALING

#### VOORBEELD 1

Op een schaal liggen 3 soorten fruit : 2 appels, 3 bananen en 4 peren. Jan legt de stuks fruit op een rij. Bereken het aantal mogelijke rijtjes als :

**a.** Hij eerst alle bananen neerlegt.

**b.** De eerste en de laatste een peer is.

Jan heeft honger gekregen en besluit 3 stukken fruit op te eten. Bereken het aantal mogelijkheden als :

**c.** Een appel en twee bananen eet.

**d.** Hij precies één peer eet.

#### OPLOSSING 1

**a.** B B B ? ? ? ? ? ? → 3 x 2 x 1 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 4320 mogelijkheden

**b.** P ? ? ? ? ? ? ? P → $4 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3 = 604800$ mogelijkheden

**c.** A B B → $2 \times 3 \times 2 = 12$
B A B → $3 \times 2 \times 2 = 12$
B B A $\underline{\rightarrow 3 \times 2 \times 2 = 12}$
Totaal = 36 mogelijkheden

**d.** P P P → $4 \times 5 \times 4 = 80$
P P P → $5 \times 4 \times 4 = 80$
P P P $\underline{\rightarrow 5 \times 4 \times 4 = 80}$
Totaal = 240 mogelijkheden

## VOORBEELD 2

Miep weet haar postcode niet meer. Een postcode bestaat uit 4 cijfers en 2 letters.

**a.** Hoeveel verschillende postcodes zijn er mogelijk?

Miep weet wel nog dat het vier verschillende cijfers waren.

**b.** Hoeveel verschillende postcodes zijn er nu nog mogelijk?

Miep weet ook nog dat de eerste twee cijfers 47 waren.

**c.** Hoeveel verschillende pincodes zijn er nu nog mogelijk?

Hans heeft een postcode waarvan de cijfers groter zijn dan 4800 en dat alle tekens verschillend zijn.

**d.** Hoeveel verschillende postcodes zijn er mogelijk voor Hans?

## OPLOSSING 2

**a.** Aantal = 10 x 10 x 10 x 10 x 26 x 26 = 6.760.000

**b.** Aantal = 10 x 9 x 8 x 7 x 26 x 26 = 3.407.040

**c.** Aantal 47?? ?? = 1 x 1 x 8 x 7 x 26 x 26 = 37.856

**d.** Er zijn 2 mogelijkheden :

**(1)** Eerste getal 5/6/7/8/9 → Aantal = 5 x 9 x 8 x 7 x 26 x 25 = 1.638.000
**(2)** Eerste 4, Tweede 8/9 → Aantal = 1 x 2 x 8 x 7 x 26 x 25 = 72.800

Totaal mogelijkheden = 1.638.000+ 72.800= 1.710.800

## LES 2 : FACULTEIT EN PERMUTATIES (=VERMENIGVULDIGEN)

### DEFINITIE

- $n! = \{n\, faculteit\} = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1$
- $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

### VOORBEELD 1

In voetbalploeg VVS zitten 13 kinderen. Een fotograaf zet alle kinderen in één rij. Hoeveel verschillende rijen zijn er mogelijk ?

### OPLOSSING 1

Aantal rijtjes = 13 x 12 x 11 x 10 x 9 x 8 x 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 6227020800
Dit kan sneller met 13 ! (= 13 faculteit ). Op GR is dat Math → Prb

### VOORBEELD 2

In klas H4a zitten 7 leerlingen die een feest willen organiseren voor de klas. Het bestuur van deze feestcommissie bestaat uit een drankinkoper, een zaalregelaar en een muziekregelaar.

- **a.** Hoeveel verschillende besturen zijn er mogelijk ?
- **b.** De zeven leerlingen gaan allen op een stoel zitten om een foto te maken. Hoeveel verschillende foto's kunnen er gemaakt worden ?

### OPLOSSING 2

- **a.** Mogelijkheden (DZM) = 7 x 6 x 5 = 210 (dit noemen ze het aantal permutaties maar dat gebruiken wij NOOIT)
- **b.** Aantal Foto's = 7 x 6 x 5 .. x 1 = 7 ! = 5040

# PARAGRAAF 1.3 COMBINATIES

## LES 1 COMBINATIES EN PERMUTATIES

### DEFINITIES

- Combinaties ={ Als het **GEEN** verschil maakt of je als 1$^e$ of als 2$^e$ wordt gekozen}
- Permutaties = { Als het **WEL** verschil maakt of je als 1$^e$ of als 2$^e$ wordt gekozen }
- Wij zullen i.p.v. permutaties zeggen dat we gewoon vermenigvuldigen

### BEREKENEN COMBINATIES (OP GR)

Aantal Combinaties = $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (uitspraak n boven k)

- n = { aantal experimenten }
- k = { aantal keer dezelfde letter }
- Op GR : $\binom{n}{k}$ = n *nCr* k (Math → Prb)
- Vaak gebruik je combinaties bij tweekeuzeproblemen.

### VOORBEELD 1

**a.** Je kiest uit 8 leerlingen een voorzitter, secretaris en penningmeester.

**b.** Je kiest uit 8 leerlingen een groep van 3 die een feest gaan organiseren.

### OPLOSSING 1

**a.** Volgorde WEL van belang dus vermenigvuldigen (ABC en BAC is NIET hetzelfde bestuur)

Mog (ABC) = 8 x 7 x 6 = 336

**b.** Volgorde NIET van belang dus combinaties (ABC en BAC is dezelfde feestgroep)

Mog (ABC) = $\frac{8!}{5!3!} = \binom{8}{3} = 8$ *nCr 3 = 56*

## VOORBEELD 2

Anne, Ben, Cas, Dex en Eline gaan winkelen. Twee van hen gaan winkelen bij de HEMA.

**a.** Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er ?

Daarna spelen ze een spelletje. Degene die eerste wordt krijgt 2 euro en degene die 2^e^ wordt krijgt één euro.

**b.** Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er ?

## OPLOSSING 2

**a.** Het maakt **NIET** uit of eerst A gaat en dan B of eerst B en dan A → combinaties.
Er geldt : n = 5 en k = 2

Mogelijkheden = $\binom{5}{2} = 10$

**b.** Het maakt **WEL** uit of eerst A wint en dan B of andersom → vermenigvuldigen.

Mogelijkheden = 5 x 4 = 20 mogelijkheden

## VOORBEELD 3

De hoofdtrainer van Fortuna heeft 5 hulptrainers. Hij kiest uit deze groep een trainer voor de A-jeugd, een voor de B-jeugd en een voor de C-jeugd.

**a.** Bereken het aantal verschillende mogelijkheden voor de samenstelling van de jeugdtrainers van Fortuna.

De trainer van Roda speelt heeft 5 hulptrainers. Hij kiest uit deze groep drie trainers voor de A-jeugd.

**b.** Bereken het aantal mogelijkheden voor de samenstelling van de jeugdtrainers van Roda.

## OPLOSSING 3

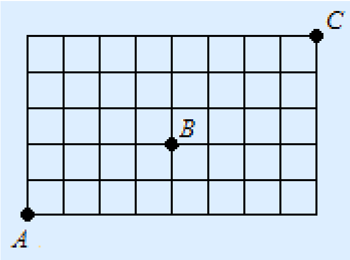
**a.** Het maakt **WEL** verschil of je als eerste of als tweede wordt gekozen, dus vermenigvuldigen.

Mogelijkheden = 5 x 4 x 3 = 60

**b.** Het maakt **GEEN** verschil of je als eerste of als tweede wordt gekozen, dus COMBINATIES.

Mogelijkheden = $\binom{5}{3} = 10$

## LES 2 : ROOSTERS




### VOORBEELD 1

Frits loopt van punt A naar punt C.

**a.** Bereken het aantal mogelijke wegen van A naar C.

Zijn broer Hans loopt altijd via punt B naar C.

**b.** Bereken het aantal mogelijke wegen voor Hans.

Stefan kijkt naar MVV-Roda met eindstand 4 - 2.

**c.** Bereken het aantal mogelijke scoreverlopen van deze wedstrijd.

### OPLOSSING 1

**a.** Weg AC = RRRRRRRRBBBBB = 8R en 5B > Wegen = $\frac{13!}{8!5!} = \binom{13}{5} = 1287$

**b.** Weg AB = RRRRRBB = 5R en 2B > Wegen = $\frac{7!}{2!5!} = \binom{7}{2} = 21$

Weg BC = RRRRBBB = 4R en 3B > Wegen = $\frac{7!}{3!4!} = \binom{7}{3} = 35$

A via B naar C = AC én CB = 21 · 35 = 735 wegen

**c.** MMMMRR = $\frac{6!}{4!2!} = \binom{6}{4} = 15$ scoreverlopen

# PARAGRAAF 1.4 PERMUTATIE EN COMBINATIE TOEPASSEN

## LES 1 MEERDERE COMBINATIES

### VOORBEELD 1

In klas H4A zitten 8 jongens en 7 meisjes. 5 Leerlingen hebben deze week corvee. Bereken het aantal verschillende corveeploegen als er in de corveeploeg :

**a.** 2 jongens en 3 meisjes zitten

**b.** Precies 4 meisjes zitten

**c.** Minstens 4 jongens zitten

### OPLOSSING 1

Het maakt **GEEN** verschil of je als eerste of als tweede wordt gekozen, dus het zijn **COMBINATIES** !!!

**a.** JJMMM = $\binom{8}{2} \cdot \binom{7}{3} = 28 \cdot 35 = 14 \cdot 70 = 980$

**b.** MMMMJ = $\binom{8}{1} \cdot \binom{7}{4} = 8 \cdot 35 = 4 \cdot 70 = 280$

**c.** Minstens 4 jongens = JJJJM of JJJJJ

$\text{JJJJM} = \binom{8}{4} \cdot \binom{7}{1} = 490$

$\text{JJJJJ} \quad = \binom{8}{5} \cdot \binom{7}{0} = \ 56$ dus Totaal = 490 + 56 = 546

## VOORBEELD 2

Jan moet langs 8 stoplichten rijden. Er is alleen rood of groen. Hoeveel series (=mogelijkheden) zijn er

**a.** Met 3 keer rood

**b.** In totaal

**c.** Als de laatste 2 rood zijn

## OPLOSSING 2

**a.** RRRGGGGG =$\binom{8}{3} = 56$

**b.** ???????? = 2·2· .. ·2 = $2^8$ = 256

**c.** ??????RR = 2·2·2·2·2·2·1·1 = $2^6$ = 64

{ of 0R + 1R + … + 8R =$\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \cdots + \binom{8}{8}$ = 256 }

## LES 2 MOGELIJKHEDEN BIJ MEER DAN 2 LETTERS

### VOORBEELD 1

Hoeveel verschillende woorden zijn er te maken met de letters van het woord RAAR?

### OPLOSSING 1

| | | |
|---|---|---|
| RRAA | ARRA | AARR |
| RARA | ARAR | |
| RAAR | | |

Er zijn dus 6 mogelijkheden. Dit kan ook sneller.

### DEFINITIE MOGELIJKHEDEN (=MOG)

- Stel er zijn a A-tjes, b B-tjes en c C-tjes. Het totale aantal plaatsen is n.
  (dus n = a + b + c).
- Het aantal verschillende mogelijkheden (mogelijke volgordes) kun je berekenen met de formule :
  **Mog(A..B…C….) =** $\frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{a}!\boldsymbol{b}!\boldsymbol{c}!}$

## VOORBEELD 2:

Bereken het aantal mogelijke verschillende volgordes van het woord :

**a.** RABARBER.

**b.** RAAR.

**c.** PAASHAAS.

## OPLOSSING 2

**a.** R = 3 , A = 2 , B = 2 en E = 1. Dus n = 3 + 2 + 2 + 1 = 8 (totaal)

Mog(RABARBER)= $\frac{8!}{3!2!2!1!} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1\cdot1} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1\cdot1} = 8\cdot7\cdot6\cdot5 = 8\cdot210 = 1680$

**b.** R = 2 , A = 2. Dus n = 2 + 2 = 4 (totaal)

Mog(RAAR)= $\frac{4!}{2!2!} = \frac{24}{2\cdot2} = 6$

**c.** P = 1 , A = 4 , S = 2 en H = 1. Dus n = 1 + 4 + 2 + 1 = 8 (totaal)

Mog(PAASHAAS)= $\frac{8!}{1!4!2!1!} = 840$

## OPMERKING

Je kunt het aantal mogelijkheden van bijv. PAASHAAS ook berekenen door letter voor letter te kiezen (bijv. eerst de P, dan de A, dan de S en als laatste de H). Dit geeft :

Mog(PAASHAAS) = $\binom{8}{1}\times\binom{7}{4}\times\binom{3}{2}\times\binom{1}{1} = 840$