

PARAGRAAF 1.0 : VERZAMELINGENLEER

LES 1 VERZAMELINGEN

Er zijn een verschillende verzamelingen getallen gedefinieerd in de wiskunde. De bekendste zijn

- $\mathbb{N} = \{ \text{Natuurlijke getallen} \} = \{0,1,2,3,4,\dots\}$
- $\mathbb{R} = \{ \text{Reële getallen} \} = \{ \text{alle mogelijke getallen dus ook } 3,246, \pi \text{ en } \sqrt{3} \}$
- $\emptyset = \{ \text{de lege verzameling} \}$

Soms wil je slechts een deel bekijken. Dit doe je door de verzameling te definiëren. Dat kun je op twee manieren doen :

(1) Met accolades

Gebruik je als er een beperkt aantal mogelijkheden zijn.

$$\begin{aligned} \text{Bijv. } A &= \{1,2,3\} \\ B &= \{3,11,12,17\} \end{aligned}$$

(2) Een voor- en achterdefinitie

Gebruik je als je een interval wilt aangeven.

$$\begin{aligned} \text{Bijv. } A &= \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\} && (\text{alle getallen kleiner dan } 5) \\ C &= \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 > 10\} && (= \{4,5,6,\dots\}) \end{aligned}$$

BEWERKINGEN OP VERZAMELINGEN

Je kunt ook een aantal bewerkingen uitvoeren. We bekijken deze met de verzamelingen $A = \{1,2,3\}$ en $B = \{3,11,12,17\}$. Deze bewerkingen zijn :

(1) Doorsnede \cap

Wat zit er in beide verzamelingen

$$\text{Bijv. } A \cap B = \{3\}$$

(2) Vereniging \cup

Welke elementen heb je samen in beide verzamelingen

Bijv. $A \cup B = \{1, 2, 3, 11, 12, 17\}$

(3) Verschil \setminus

Welke elementen zitten wel in de eerste maar niet in de tweede

Bijv. $A \setminus B = \{1, 2\}$ en $B \setminus A = \{11, 12, 17\}$

(4) Deelverzameling \subset

Is de eerste verzameling een deel van de tweede.

Bijv. $A \subset B \rightarrow$ Niet waar. Dan zouden alle elementen van A in B moet zitten

Bijv. $A \subset \mathbb{N} \rightarrow$ Waar. Alle elementen van A zitten in \mathbb{N}

(5) Product \times

Pak een element uit A en een element uit B (coördinaat)

Bijv. $A \times \{4,5\} \rightarrow (1,4), (1,5), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5),$

VOORBEELD 1

Gegeven zijn de verzamelingen $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x < 7\}$ $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ $C = \{4, 5, 6, 7\}$

Bereken

- a. $A \cap B$
- b. $B \cup \emptyset$
- c. $B \subset \mathbb{N}$
- d. A / B
- e. $A / (B \cap C)$
- f. $(A \cap B) \times (A/B)$

OPLOSSING 1

Vooraf : Bedenk de de verzameling A ook geschreven kan worden als $A = \{3, 4, 5, 6\}$

- a. $A \cap B = \{3, 5\}$
- b. $B \cup \emptyset = B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
- c. $B \subset \mathbb{N}$. Waar want alle elementen van B zitten in \mathbb{N} .
- d. $A/B = \{4, 6\}$
- e. $(B \cap C) = \{5, 7\}$
 $A / (B \cap C) = \{3, 4, 6\}$
- f. $(A \cap B) \times (A/B) = (3, 4), (3, 6), (5, 4), (5, 6)$

PARAGRAAF 1.1 : DE SOM EN DE PRODUCTREGEL

LES 1 VERSCHILLENDE MANIEREN VOOR TELLEN MOGELIJKHEDEN

VOORBEELD 1

Jan gaat eten bij de Merode. Hij kan kiezen uit

- 2 voorgerechten : soep of cocktail
- 3 hoofdgerechten : vis of bief of kip
- 2 nagerechten : ijs of gebak.

Hoeveel verschillende menu's kan Jan eten ?

DEFINITIES

Er zijn een aantal manieren om telproblemen weer te geven.

1. Boomdiagram :

$2 \times 3 \times 2 = 12$ mogelijkheden

2. Wegendiagram

$2 \times 3 \times 2 = 12$ mogelijkheden

3. Systematisch tellen : Zet de eerste keuze vast (onderstrepen) en bepaal de rest erna

- | | |
|-------------|-------------|
| <u>S</u> VG | <u>C</u> VG |
| <u>S</u> VY | <u>C</u> VY |
| <u>S</u> BG | <u>C</u> BG |
| <u>S</u> BY | <u>C</u> BY |
| <u>S</u> KG | <u>C</u> KG |
| <u>S</u> KY | <u>C</u> KY |

4. Rooster (Werkt goed bij twee keuzes)

VOORBEELD 2

Je gooit met twee dobbelstenen. Bereken op hoeveel manieren je 9 ogen komt gooien.

OPLOSSING 2

Maak een rooster :

		dobbelsteen 1					
		1	2	3	4	5	6
dobbelsteen 2	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

Je ziet dat er 4 mogelijkheden zijn.

VOORBEELD 3

Bereken het aantal mogelijkheden als :

- Jan na 4 sets wint met tennis van Piet.
- Je met 2 dobbelstenen 8 gooit
- Wim met drie dobbelstenen minstens 17 gooit.

OPLOSSING 3

- PJJ / JPJ / JJP → 3 mogelijkheden
- 26 / 35 / 44 / 53 / 62 → 5 mogelijkheden (Laat ook rooster zien)
- Minstens 17 → 17 of 18

18	→ 666	→ 1 mogelijkheid
17	→ 566 of 656 of 665	→ <u>3 mogelijkheden</u> +
Dus minstens 17 ogen		= 4 mogelijkheden

LES 2 DE SOM EN DE PRODUCTREGEL

VOORBEELD 1

In de volgende tabel staat de verdeling jongens-meisjes van de klassen 4, 5 en 6 op een scholengemeenschap.

Je kiest uit iedere klas één leerling. Bereken het aantal mogelijkheden als:

- Je 3 jongens kiest.
- Je precies twee meisjes kiest.
- Je uit klas 5 een jongen kiest.

	klas 4	klas 5	klas 6	totaal
Jongen	45	42	38	125
Meisje	5	12	18	35
totaal	50	54	56	160

OPLOSSING 1

a. $JJJ \rightarrow 45 \times 42 \times 38 = 71820$

b. $MMJ \rightarrow 5 \times 12 \times 38 = 2280$
 $MJM \rightarrow 5 \times 42 \times 18 = 3780$
 $JMM \rightarrow 45 \times 12 \times 18 = \underline{9720} +$
 Totaal $= 15780$

c. $?J? \rightarrow 50 \times 42 \times 56 = 117600$

PARAGRAAF 1.2 : VARIATIES EN HERHALINGSVARIATIES

LES 1 MET OF ZONDER HERHALING

VOORBEELD 1

Op een schaal liggen 3 soorten fruit : 2 appels, 3 bananen en 4 peren. Jan legt de stuks fruit op een rij. Bereken het aantal mogelijke rijtjes als :

- Hij eerst alle bananen neerlegt.
- De eerste en de laatste een peer is.

Jan heeft honger gekregen en besluit 3 stukken fruit op te eten. Bereken het aantal mogelijkheden als :

- Een appel en twee bananen eet.
- Hij precies één peer eet.

OPLOSSING 1

- $B B B ? ? ? ? ? \rightarrow 3 \times 2 \times 1 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4320$ mogelijkheden
- $P ? ? ? ? ? ? ? P \rightarrow 4 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3 = 604800$ mogelijkheden

- $A B B \rightarrow 2 \times 3 \times 2 = 12$
 $B A B \rightarrow 3 \times 2 \times 2 = 12$
 $B B A \rightarrow 3 \times 2 \times 2 = 12$
 Totaal = 36 mogelijkheden

- $P P P \rightarrow 4 \times 5 \times 4 = 80$
 $P P P \rightarrow 5 \times 4 \times 4 = 80$
 $P P P \rightarrow 5 \times 4 \times 4 = 80$
 Totaal = 240 mogelijkheden

VOORBEELD 2

Miep weet haar postcode niet meer. Een postcode bestaat uit 4 cijfers en 2 letters.

a. Hoeveel verschillende postcodes zijn er mogelijk?

Miep weet wel nog dat het vier verschillende cijfers waren.

b. Hoeveel verschillende postcodes zijn er nu nog mogelijk?

Miep weet ook nog dat de eerste twee cijfers 47 waren.

c. Hoeveel verschillende pincodes zijn er nu nog mogelijk?

Hans heeft een postcode waarvan de cijfers groter zijn dan 4800 en dat alle tekens verschillend zijn.

d. Hoeveel verschillende postcodes zijn er mogelijk voor Hans?

OPLOSSING 2

a. Aantal = $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 26 \times 26 = 6.760.000$

b. Aantal = $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 26 \times 26 = 3.407.040$

c. Aantal 47?? ?? = $1 \times 1 \times 8 \times 7 \times 26 \times 26 = 37.856$

d. Er zijn 2 mogelijkheden :

(1) Eerste getal 5/6/7/8/9 → Aantal = $5 \times 9 \times 8 \times 7 \times 26 \times 25 = 1.638.000$

(2) Eerste 4, Tweede 8/9 → Aantal = $1 \times 2 \times 8 \times 7 \times 26 \times 25 = 72.800$

Totaal mogelijkheden = $1.638.000 + 72.800 = 1.710.800$

LES 2 : FACULTEIT EN PERMUTATIES (=VERMENIGVULDIGEN)**DEFINITIE**

- $n! = \{n \text{ faculteit} \} = n \times (n - 1) \times \dots \times 2 \times 1$
- $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

VOORBEELD 1

In voetbalploeg VVS zitten 13 kinderen. Een fotograaf zet alle kinderen in één rij. Hoeveel verschillende rijen zijn er mogelijk ?

OPLOSSING 1

Aantal rijtjes = $13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6227020800$

Dit kan sneller met $13!$ (= 13 faculteit). Op GR is dat Math \rightarrow Prb

VOORBEELD 2

In klas H4a zitten 7 leerlingen die een feest willen organiseren voor de klas. Het bestuur van deze feestcommissie bestaat uit een drankinkoper, een zaalregelaar en een muzikregelaar.

- a. Hoeveel verschillende besturen zijn er mogelijk ?
- b. De zeven leerlingen gaan allen op een stoel zitten om een foto te maken. Hoeveel verschillende foto's kunnen er gemaakt worden ?

OPLOSSING 2

- a. Mogelijkheden (DZM) = $7 \times 6 \times 5 = 210$ (dit noemen ze het aantal permutaties maar dat gebruiken wij NOOIT)
- b. Aantal Foto's = $7 \times 6 \times 5 \dots \times 1 = 7! = 5040$

PARAGRAAF 1.3 COMBINATIES

LES 1 COMBINATIES EN PERMUTATIES

DEFINITIES

- Combinaties = { Als het **GEEN** verschil maakt of je als 1^e of als 2^e wordt gekozen }
- Permutaties = { Als het **WEL** verschil maakt of je als 1^e of als 2^e wordt gekozen }
- Wij zullen i.p.v. permutaties zeggen dat we gewoon vermenigvuldigen

BEREKENEN COMBINATIES (OP GR)

$$\text{Aantal Combinaties} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (\text{uitspraak } n \text{ boven } k)$$

- $n = \{ \text{aantal experimenten} \}$
- $k = \{ \text{aantal keer dezelfde letter} \}$
- Op GR : $\binom{n}{k} = n \text{ nCr } k$ (Math \rightarrow Prb)
- Vaak gebruik je combinaties bij tweekeuzeproblemen.

VOORBEELD 1

- a. Je kiest uit 8 leerlingen een voorzitter, secretaris en penningmeester.
- b. Je kiest uit 8 leerlingen een groep van 3 die een feest gaan organiseren.

OPLOSSING 1

- a. Volgorde WEL van belang dus vermenigvuldigen (ABC en BAC is NIET hetzelfde bestuur)

$$\text{Mog (ABC)} = 8 \times 7 \times 6 = 336$$

- b. Volgorde NIET van belang dus combinaties (ABC en BAC is dezelfde feestgroep)

$$\text{Mog (ABC)} = \frac{8!}{5!3!} = \binom{8}{3} = 8 \text{ nCr } 3 = 56$$

VOORBEELD 2

Anne, Ben, Cas, Dex en Eline gaan winkelen. Twee van hen gaan winkelen bij de HEMA.

- a. Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er ?

Daarna spelen ze een spelletje. Degene die eerste wordt krijgt 2 euro en degene die 2^e wordt krijgt één euro.

- b. Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er ?

OPLOSSING 2

- a. Het maakt **NIET** uit of eerst A gaat en dan B of eerst B en dan A → combinaties.

Er geldt : $n = 5$ en $k = 2$

$$\text{Mogelijkheden} = \binom{5}{2} = 10$$

- b. Het maakt **WEL** uit of eerst A wint en dan B of andersom → vermenigvuldigen.

Mogelijkheden = $5 \times 4 = 20$ mogelijkheden

VOORBEELD 3

De hoofdtrainer van Fortuna heeft 5 hulptrainers. Hij kiest uit deze groep een trainer voor de A-jeugd, een voor de B-jeugd en een voor de C-jeugd.

- a. Bereken het aantal verschillende mogelijkheden voor de samenstelling van de jeugdtrainers van Fortuna.

De trainer van Roda speelt heeft 5 hulptrainers. Hij kiest uit deze groep drie trainers voor de A-jeugd.

- b. Bereken het aantal mogelijkheden voor de samenstelling van de jeugdtrainers van Roda.

OPLOSSING 3

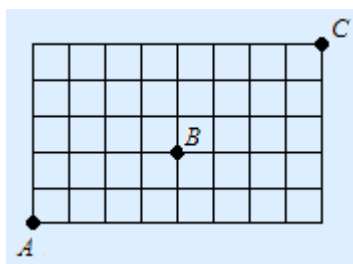
- a. Het maakt **WEL** verschil of je als eerste of als tweede wordt gekozen, dus vermenigvuldigen.

$$\text{Mogelijkheden} = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

- b. Het maakt **GEEN** verschil of je als eerste of als tweede wordt gekozen, dus **COMBINATIES**.

$$\text{Mogelijkheden} = \binom{5}{3} = 10$$

LES 2 : ROOSTERS



VOORBEELD 1

Frits loopt van punt A naar punt C.

- a. Bereken het aantal mogelijke wegen van A naar C.

Zijn broer Hans loopt altijd via punt B naar C.

- b. Bereken het aantal mogelijke wegen voor Hans.

Stefan kijkt naar MVV-Roda met eindstand 4 - 2.

- c. Bereken het aantal mogelijke scoreverlopen van deze wedstrijd.

OPLOSSING 1

a. Weg AC = RRRRRRRRBBBBB = 8R en 5B > Wegen = $\frac{13!}{8!5!} = \binom{13}{5} = 1287$

b. Weg AB = RRRRRBB = 5R en 2B > Wegen = $\frac{7!}{5!2!} = \binom{7}{2} = 21$

Weg BC = RRRRBBB = 4R en 3B > Wegen = $\frac{7!}{4!3!} = \binom{7}{3} = 35$

A via B naar C = AC én CB = $21 \cdot 35 = 735$ wegen

c. MMMMRR = $\frac{6!}{4!2!} = \binom{6}{4} = 15$ scoreverlopen

PARAGRAAF 1.4 PERMUTATIE EN COMBINATIE TOEPASSEN

LES 1 MEERDERE COMBINATIES

VOORBEELD 1

In klas H4A zitten 8 jongens en 7 meisjes. 5 Leerlingen hebben deze week corvee. Bereken het aantal verschillende corveeploegen als er in de corveeploeg :

- 2 jongens en 3 meisjes zitten
- Precies 4 meisjes zitten
- Minstens 4 jongens zitten

OPLOSSING 1

Het maakt **GEEN** verschil of je als eerste of als tweede wordt gekozen, dus het zijn **COMBINATIES** !!!

a. $JJMMM = \binom{8}{2} \cdot \binom{7}{3} = 28 \cdot 35 = 14 \cdot 70 = 980$

b. $MMMMJ = \binom{8}{1} \cdot \binom{7}{4} = 8 \cdot 35 = 4 \cdot 70 = 280$

- c. Minstens 4 jongens = JJJM of JJJJ

$$JJJM = \binom{8}{4} \cdot \binom{7}{1} = 490$$

$$JJJJ = \binom{8}{5} \cdot \binom{7}{0} = 56 \quad \text{dus Totaal} = 490 + 56 = 546$$

VOORBEELD 2

Jan moet langs 8 stoplichten rijden. Er is alleen rood of groen. Hoeveel series (=mogelijkheden) zijn er

- Met 3 keer rood
- In totaal
- Als de laatste 2 rood zijn

OPLOSSING 2

a. $RRRGGGGG = \binom{8}{3} = 56$

b. $???????? = 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^8 = 256$

c. $?????RR = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2^6 = 64$

{ of $0R + 1R + \dots + 8R = \binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \dots + \binom{8}{8} = 256$ }

LES 2 MOGELIJKHEDEN BIJ MEER DAN 2 LETTERS**VOORBEELD 1**

Hoeveel verschillende woorden zijn er te maken met de letters van het woord RAAR?

OPLOSSING 1

RRAA ARRR AARR
RRAR ARAR
RAAR

Er zijn dus 6 mogelijkheden. Dit kan ook sneller.

DEFINITIE MOGELIJKHEDEN (=MOG)

- Stel er zijn a A-tjes, b B-tjes en c C-tjes. Het totale aantal plaatsen is n.
(dus $n = a + b + c$).
- Het aantal verschillende mogelijkheden (mogelijke volgordes) kun je berekenen met de formule :
$$\mathbf{Mog(A..B...C....)} = \frac{n!}{a!b!c!}$$

VOORBEELD 2:

Bereken het aantal mogelijke verschillende volgordes van het woord :

- RABARBER.
- RAAR.
- PAASHAAS.

OPLOSSING 2

- a. R = 3 , A = 2 , B = 2 en E = 1. Dus $n = 3 + 2 + 2 + 1 = 8$ (totaal)

$$\text{Mog(RABARBER)} = \frac{8!}{3!2!2!1!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 8 \cdot 210 = 1680$$

- b. R = 2 , A = 2. Dus $n = 2 + 2 = 4$ (totaal)

$$\text{Mog(RAAR)} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6$$

- c. P = 1 , A = 4 , S = 2 en H = 1. Dus $n = 1 + 4 + 2 + 1 = 8$ (totaal)

$$\text{Mog(PAASHAAS)} = \frac{8!}{1!4!2!1!} = 840$$

OPMERKING

Je kunt het aantal mogelijkheden van bijv. PAASHAAS ook berekenen door letter voor letter te kiezen (bijv. eerst de P, dan de A, dan de S en als laatste de H). Dit geeft :

$$\text{Mog(PAASHAAS)} = \binom{8}{1} \times \binom{7}{4} \times \binom{3}{2} \times \binom{1}{1} = 840$$