

PARAGRAAF K.1 : SUBSTITUTIE METHODE

STAPPENPLAN VOOR DE SUBSTITUTIE METHODE :

(1) Neem $y =$ formule (bij kettingregel noem je deze formule meestal u)

(2) $\frac{dy}{dx} = y'$ omschrijven tot $y' dx = dy$

(3) Vul in de integraal de y en dy in en integreer deze formule.

VOORBEELD 1

Bepaal de primitieve van

a. $\int 2x(x^2 + 3)^5 dx =$

b. $\int \frac{9x^2}{\sqrt{x^3 - 5}} dx =$

c. $\int \cos^2(x) \sin(x) dx =$

OPLOSSING 1

a. Substitutiemethode toepassen :

(1) $y = x^2 + 3$

(2) $\frac{dy}{dx} = 2x$ dus $dy = 2x dx$

(3) $\int 2x(x^2 + 3)^5 dx = \int (x^2 + 3)^5 \cdot 2x dx = \int (y)^5 dy = \left[\frac{1}{6} y^6 \right] = \left[\frac{1}{6} (x^2 + 3)^6 \right] =$

b. Substitutiemethode toepassen :

(1) $y = x^3 - 5$

(2) $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ dus $dy = 3x^2 dx$ dus $3 dy = 9x^2$

(3) $\int \frac{9x^2}{\sqrt{x^3 - 5}} dx = \int \frac{3}{\sqrt{y}} dy = [3 \cdot 2 \cdot \sqrt{y}] = [6\sqrt{y}] = [6\sqrt{x^3 - 5}]$

c. Substitutiemethode toepassen :

(1) $y = \cos(x)$

(2) $\frac{dy}{dx} = -\sin(x)$ dus $dy = -\sin(x) dx$

(3) $\int \cos^2(x) \sin(x) dx = \int -\cos^2(x) \cdot -\sin(x) dx = \int -y^2 dy = \left[\frac{1}{3} y^3 \right] = \left[\frac{1}{3} \cos^3(x) \right] =$

PARAGRAAF K.2 : PARTIEEL INTEGREREN

STAPPENPLAN VOOR PARTIEEL INTEGREREN :

- (1) Noem de ene formule f' (deze wil je integreren) en de andere g (deze wil je differentiëren)
- (2) Vul deze in bij $\int f' \cdot g dx = [f \cdot g] - \int f \cdot g' dx$
- (3) Probeer de laatste te integreren en als dat niet lukt herhaal dan stap 1 en 2 voor de laatste integraal.

VOORBEELD 1

Bepaal de primitieve van

a. $\int x \ln(x) dx =$

b. $\int 3x \cdot e^x dx =$

c. $\int \cos(x) \cdot e^x dx =$

OPLOSSING 1

- a. Je wil $\ln(x)$ graag differentiëren dus $g = \ln(x)$ en $f' = x$. Dit geeft :

$$g = \ln(x) \Leftrightarrow g' = \frac{1}{x}$$

$$f' = x \Leftrightarrow f = \frac{1}{2}x^2.$$

Nu de regel toepassen

$$\int x \ln(x) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) \right] - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$\left[\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) \right] - \int \frac{1}{2}x dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) \right] - \left[\frac{1}{4}x^2 \right] = \left[\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) - \frac{1}{4}x^2 \right]$$

b. Je wil $3x$ graag differentiëren dus $g = 3x$ dus $f' = e^x$. Dit geeft

$$g = 3x \Rightarrow g' = 3$$

$$f' = e^{2x} \Rightarrow f = \frac{1}{2}e^{2x}.$$

$$\text{Dus } \int 3x \cdot e^{2x} dx = \left[3x \cdot \frac{1}{2}e^{2x} \right] - \int 3 \cdot \frac{1}{2}e^{2x} dx =$$

$$\left[\frac{3}{2}xe^{2x} \right] - \left[\frac{3}{4}e^{2x} \right] = \left[\frac{3}{2}xe^{2x} - \frac{3}{4}e^{2x} \right]$$

c. Partieel Integreren toepassen. Er is nu geen echte voorkeur. We kiezen daarom (willekeurig) $g = \cos(x)$ dus $f' = e^x$. Dit geeft

$$g = \cos(x) \Rightarrow g' = -\sin(x)$$

$$f' = e^x \Rightarrow f = e^x.$$

Dus

$$(1) \int \cos(x) \cdot e^x dx = \left[\cos(x) \cdot e^x \right] - \int -\sin(x)e^x dx = \left[\cos(x) \cdot e^x \right] + \int \sin(x)e^x dx$$

Je bent niks opgeschoten (lijkt het). Je gaat nu nog een keer Partieel Integreren met

$$g = \sin(x) \Rightarrow g' = \cos(x)$$

$$f' = e^x \Rightarrow f = e^x.$$

Dus

$$(2) \int \sin(x) \cdot e^x dx = \left[\sin(x) \cdot e^x \right] - \int \cos(x)e^x dx$$

Je hebt nu weer dezelfde integraal. Je gaat nu (1) en (2) te combineren

$$(3) \int \cos(x) \cdot e^x dx = \left[\cos(x) \cdot e^x \right] + \int \sin(x)e^x dx =$$

$$= \left[\cos(x) \cdot e^x \right] + \left[\sin(x) \cdot e^x \right] - \int \cos(x)e^x dx$$

(4) Stel $Q = \int \cos(x) \cdot e^x dx$. Dit geeft

$$Q = \left[\cos(x) \cdot e^x \right] + \left[\sin(x) \cdot e^x \right] - Q$$

$$2Q = \left[\cos(x) \cdot e^x + \sin(x) \cdot e^x \right]$$

$$Q = \left[\frac{1}{2} \cos(x) \cdot e^x + \frac{1}{2} \sin(x) \cdot e^x \right]$$

PARAGRAAF K.3 : CYCLOMETRISCHE FUNCTIES

DEFINITIES

(1) $\arctan(x) = \tan^{-1}(x)$ met Domein = \mathbb{R} en Bereik = $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$

(2) $\arcsin(x) = \sin^{-1}(x)$ met Domein = $[-1,1]$ en Bereik = $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$

(3) $\arccos(x) = \cos^{-1}(x)$ met Domein = $[-1,1]$ en Bereik = $[0, \pi]$

VOORBEELD 1

Bereken

a. $\arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) =$

b. $\arctan(-1) =$

c. $\arccos(2x + 3) = \frac{1}{3}\pi$

OPLOSSING 1

a. $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$$x = \frac{1}{6}\pi \text{ v } x = \frac{5}{6}\pi$$

b. $\tan(x) = -1$

$$x = -\frac{1}{4}\pi$$

c. $\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = 2x + 3$

$$2x + 3 = \frac{1}{2}$$

$$x = -1\frac{1}{4}$$

DIFFERENTIËREN VAN CYCLOMETRISCHE FUNCTIES

(1) $f(x) = \arctan(x)$ dan is $f'(x) = \frac{1}{x^2+1}$

(2) $f(x) = \arcsin(x)$ dan is $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(3) $f(x) = \arccos(x)$ dan is $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

VOORBEELD 1

Bepaal de primitieve van

a. $\int \frac{1}{9x^2 + 1} dx =$

b. $\int \frac{5}{x^2 + 8x + 17} dx =$

OPLOSSING 1

a. $\int \frac{1}{9x^2 + 1} dx = \int \frac{1}{(3x)^2 + 1} dx = \left[\frac{1}{3} \arctan(3x) \right]$

b. $\int \frac{5}{x^2 + 8x + 17} dx = \int 5 \cdot \frac{1}{(x + 4)^2 + 1} dx = [5 \arctan(x + 4)]$

PARAGRAAF K.4 : BREUKSPLITSEN

INTEGREREN MET DISCRIMINANT IN DE BREUK

De functie $f(x) = \frac{px+q}{ax^2+bx+c}$ kun je op een aantal manieren integreren. Dit hangt af van de waarde van $D = b^2 - 4ac$. Er geldt :

- (1) Als $D < 0$ → iets met $\arctan(x)$
 (2) Als $D = 0$ → Substitutiemethode (iets met $\ln(ax^2 + bx + c)$)
 (3) Als $D > 0$ → Breuksplitsen : $\frac{px+q}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$

VOORBEELD 1 : BREUKSPLITSEN

Bepaal de primitieve van $\int \frac{3x+5}{x^2+x-2} dx$

OPLOSSING 1

1. Omdat $D > 0$ en omdat $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$ kun je deze integraal schrijven als :

$$\frac{3x+5}{x^2+x-2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}$$

2. Nu gaan we de laatste vorm als één breuk schrijven. Dit geeft

$$\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)}{(x+2)(x-1)} + \frac{B(x+2)}{(x-1)(x+2)} = \frac{Ax+Bx-A+2B}{x^2+x-2}$$

3. Deze laatste vorm moet gelijk zijn aan $\frac{3x+5}{x^2+x-2}$. Dit betekent dat

$$A + B = 3 \text{ en } -A + 2B = 5$$

$$\text{Optellen geeft } 3B = 8 \text{ dus } B = \frac{8}{3}$$

$$\text{Dus } A = 3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$$

4. Nu de integraal berekenen : $\int \frac{3x+5}{x^2+x-2} dx = \int \frac{\frac{1}{3}}{x+2} + \frac{\frac{8}{3}}{x-1} dx = \frac{1}{3} \ln(x+2) + \frac{8}{3} \ln(x-1)$

VOORBEELD 2 : DOOR ELKAAR

Bepaal de primitieve van

a. $\int \frac{x+1}{x^2-4x+4} dx$

b. $\int \frac{8}{x^2-2x-15} dx$

OPLOSSING 1

a. Omdat $D = 0$ moeten we de substitutiemethode gebruiken :

(1) $y = x^2 - 4x + 4$

(2) $dy = (2x - 4)dx$ dus $\frac{1}{2}dy = (x - 2)dx$

(3) De ln-vorm eruit halen geeft :

$$\int \frac{x+1}{x^2-4x+4} dx = \int \frac{x-2+3}{x^2-4x+4} dx = \int \frac{x-2}{x^2-4x+4} dx + \int \frac{3}{x^2-4x+4} dx =$$

$$\int \frac{1}{y} dy + \int \frac{3}{(x-2)^2} dx = [\ln(y) + 3(x-2)^{-1}] = \left[\ln(x^2 - 4x + 4) + \frac{3}{x-2} \right]$$

b. Omdat $D > 0$ en omdat $x^2 - 2x - 15 = (x+3)(x-5)$ kun je deze schrijven als :

1. $\frac{8}{x^2-2x-15} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-5}$

2. Nu gaan we de laatste vorm als één breuk schrijven. Dit geeft

$$\frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-5} = \frac{A(x-5)}{(x+3)(x-5)} + \frac{B(x+3)}{(x-5)(x+3)} = \frac{Ax+Bx-5A+3B}{x^2-2x-15}$$

3. Deze laatste vorm moet gelijk zijn aan $\frac{8}{x^2-2x-15}$.

Dit betekent dat

$$A + B = 0 \quad \text{en} \quad -5A + 3B = 8$$

Omdat $A = -B$ krijg je $-5B - 3B = 8$ geeft $B = -1$. Dus $A = 1$

4. Nu kunnen we de integraal bepalen :

$$\int \frac{8}{x^2 - 2x - 15} dx = \int \frac{1}{x+3} + \frac{-1}{x-5} dx = [\ln(x+3) - \ln(x-5)]$$

