PARAGRAAF 9.1 : LOGARITMEN

LES 1 LOGARITMEN

DEFINITIE LOGARITMEN

- Hoofdregel : $g^t = b \Leftrightarrow t = {}^g log\ (b)$ met domein $b > 0$

Voor logaritmen uit je hoofd berekenen gebruik je de hulpregel

- Hulpregel : ${}^g log(g)^t = t$

VOORBEELD 1

Bereken uit je hoofd

a. ${}^3 log(9) =$

b. ${}^3\log(\sqrt{27})$

c. ${}^2 log\left(\frac{1}{2}\right)$

OPLOSSING 1

a. ${}^3 log(9) = {}^3 log(3^2) = 2$

b. ${}^3 log(\sqrt{27}) = {}^3 log(\sqrt{3^3}) = {}^3 log\left((3^3)^{\frac{1}{2}}\right) = {}^3 log\left(3^{1\frac{1}{2}}\right) = 1\frac{1}{2}$

c. ${}^2 log\left(\frac{1}{2}\right) = {}^2 log(2^{-1}) = -1$

VOORBEELD 2

Bereken exact

a. ${}^{5}\log(2x-1)=3$

b. $4\cdot{}^{2}\log(2x)+1=13$

OPLOSSING 2

Je kunt dit op twee manieren oplossen :

- Met de hoofdregel : $g^t=b \Leftrightarrow t={}^{g}\log(b)$
- Met de hulpregel : ${}^{g}\log(g^t)=t$

a. ${}^{5}\log(2x-1)=3$	Of	${}^{5}\log(2x-1)=3$
$2x-1=5^3$	Of	${}^{5}\log(2x-1)=3$
$2x-1=125$	Of	${}^{5}\log(2x-1)={}^{5}\log(5^3)$
$2x=126$	Of	$2x-1=125$
$x=63$	Of	$2x=126$
		$x=63$

b. Deze doen we alleen met de hoofdregel

$4\cdot{}^{2}\log(2x)+1=13$

$4\cdot{}^{2}\log(2x)=12$

${}^{2}\log(2x)=3$

$2x=2^3$

$2x=8$

$x=4$

LES 2 : GRAFIEKEN EN ONGELIJKHEDEN

STAPPENPLAN LOGARITMISCHE ONGELIJKHEDEN

(0) Bepaal het domein

(1) Los de vergelijking op (I)

(2) Maak een schets van de twee grafieken. Let op het domein!!!! **(S)**

(3) Lees de oplossing af uit de schets. **(A)**

VOORBEELD 1

Gegeven $f(x) = {}^4log\,(x+2)$ en $g(x) = {}^4log\,(5-x)$.

a. Bepaal de domeinen van f en g.

b. Los op : $f(x) \leq g(x)$

OPLOSSING 1

a. $Domein\ f:$ $\quad x+2>0$

$x > -2 \qquad (VA: x = -2)$

$Domein\ g:$ $\quad 5 - x > 0$

$x < 5 \qquad (VA: x = 5)$

b. **(1)** ${}^{4}log\ (x+2) = {}^{4}log\ (5-x).$

$x + 2 = 5 - x$

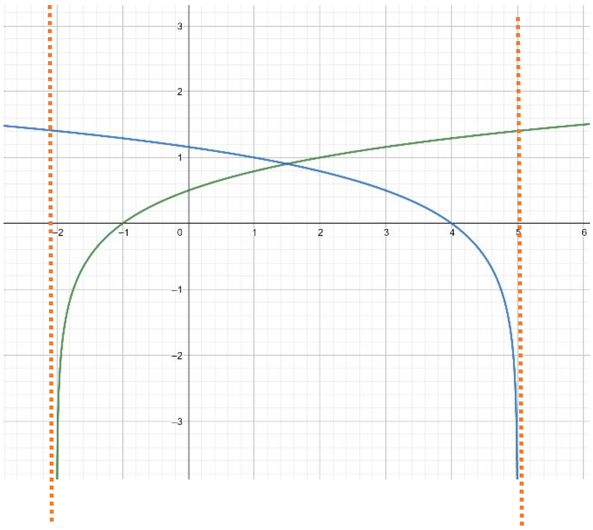
$2x = 3$

$x = 1\frac{1}{2}$ *{ of met de GR en intersect als er geen exact/alg. staat}*

(2) Schets (met knop logbase)

$Y1 = log_4\ (x+2)$

$Y2 = log_4\ (5-x)$



(3) $-2 < x \leq 1\frac{1}{2}$

LES 3 : EXPONENTIËLE VERGELIJKINGEN OPLOSSEN EN OMSCHRIJVEN

VOORBEELD 1

Los exact op

a. $3^{x+4} = 20$
b. $5 \cdot 2^{3x-1} = 100$

OPLOSSING 1

a. $3^{x+4} = 20$ { Gebruik de hoofdregel $g^t = b \Leftrightarrow t = {}^{g}log\ (b)$ }

$x + 4 = {}^{3}\log(20)$

$x = {}^{3}\log(20) - 4$

b. $5 \cdot 2^{3x-1} = 100$

$2^{3x-1} = 20$

$3x - 1 = {}^{2}\log(20)$

$3x = {}^{2}\log(20) + 1$

$x = \frac{1}{3} \cdot {}^{2}\log(20) + \frac{1}{3}$

VOORBEELD 2

Maak x vrij bij de formule $y = 3^{x+4} - 20$ { Schrijf als x = … }

Oplossing 2

$y = 3^{x+4} - 20$

$y + 20 = 3^{x+4}$

$x + 4 = {}^{3}\log(y + 20)$

$x = {}^{3}\log(y + 20) - 4$

PARAGRAAF 9.2 : REKENREGELS BIJ LOGARITMEN

LES 1 : LOGARITMISCHE VERGELIJKINGEN

REKENREGELS LOGARITMEN

De belangrijkste 4 regels zijn :

(1)	${}^{g}log\ (a) + {}^{g}log\ (b) = {}^{g}log\ (a \cdot b)$	${}^{3}log\ (5) + {}^{3}log\ (x) = {}^{3}log\ (5x)$
(2)	${}^{g}log\ (a) - {}^{g}log\ (b) = {}^{g}log\ (\frac{a}{b})$	${}^{2}log\ (10) - {}^{2}log\ (5) = {}^{2}log\ (\frac{10}{5}) = 1$
(3)	${}^{g}log(a^k) = k \cdot {}^{g}log(a)$	${}^{3}log(a^5) = 5 \cdot {}^{3}log(a)$
(4)	${}^{g}log(g)^t = t$	${}^{7}log(7)^5 = 5$

Er zijn ook nog een aantal regels die handig kunnen zijn :

(5)	${}^{g}log(1) = 0$	${}^{7}log(1) = {}^{7}log(7^0) = 0$
(6)	$log(a) = {}^{10}log(a)$	$log(3) = {}^{10}log(3)$
(7)	${}^{g}log\ (a) = \frac{log\ (a)}{log\ (g)}$	${}^{8}log\ (20) = \frac{log\ (20)}{log\ (8)}$
(8)	${}^{\frac{1}{g}}log(a) = -\ {}^{g}log(a)$	${}^{\frac{1}{3}}log(x) = -\ {}^{3}log(x)$

VOORBEELD 1

Bereken exact met de rekenregels

a. ${}^{3}log(6) + {}^{3}log(12)$

b. ${}^{3}log(25) + {}^{\frac{1}{3}}log(5)$

c. $2 \cdot {}^{3}log(6) - {}^{3}log(12) =$

OPLOSSING 1

a. ${}^{3}log(6) + {}^{3}log(12) = {}^{3}log(6 \cdot 12) = {}^{3}log(72)$

b. ${}^{3}log(25) + {}^{\frac{1}{3}}log(5) = {}^{3}log(5^2) - {}^{3}log(5) = 2 \cdot {}^{3}log(5) - {}^{3}log(5) = {}^{3}log(5)$

c. $2 \cdot {}^{3}log(6) - {}^{3}log(12) = {}^{3}log(6^2) - {}^{3}log(12) = {}^{3}log(36) - {}^{3}log(12)$

${}^{3}log\left(\frac{36}{12}\right) = {}^{3}log(3) = 1$ { want $3^1 = 3$ }

VOORBEELD 2

Los algebraïsch op

a. $2 + {}^{4}log(x) = {}^{4}log(x)\ (12 - 3x)$

b. ${}^{2}log(x+5) - {}^{\frac{1}{2}}log(x+2) = 2$

c. ${}^{2}log^{2}(x) + {}^{2}log(x) = 6$

OPLOSSING 2

a.

$$\begin{aligned}
&2 + {}^{4}\log(x) = {}^{4}\log(12-3x)\\
&{}^{4}\log(4^{2}) + {}^{4}\log(x) = {}^{4}\log(12-3x)\\
&{}^{4}\log(16x) = {}^{4}\log(12-3x)\\
&16x = 12 - 3x\\
&19x = 12\\
&x = \tfrac{12}{19}
\end{aligned}$$

b. Er geldt : ${}^{\frac{1}{2}}log(x+2) = -\ {}^{2}log(x+2)$.

Dit geeft :

$$\begin{aligned}
&{}^{2}\log(x+5) + {}^{2}\log(x+2) = 2\\
&{}^{2}\log((x+5)\cdot(x+2)) = {}^{2}\log(2^{2})\\
&{}^{2}\log(x^{2}+7x+10) = {}^{2}\log(4)\\
&x^{2}+7x+10 = 4\\
&x^{2}+7x+6 = 0\\
&(x+6)\cdot(x+1) = 0\\
&x = -6 \quad v \quad x = -1\\
&(V.N.)
\end{aligned}$$

c.

$$({}^{2}\log(x))^{2} + {}^{2}\log(x) = 6 \qquad \{Stel\ {}^{2}\log(x) = p\}$$

$$p^{2} + p - 6 = 0$$

$$(p+3)\cdot(p-2) = 0$$

$$p = -3 \quad v \quad p = 2$$

$$^{2}\log(x) = -3 \quad v \quad {}^{2}\log(x) = 2$$

$$x = 2^{-3} = \tfrac{1}{8} \qquad v \qquad x = 4$$

LES 2 EXPONENTIELE VERGELIJKINGEN OPLOSSEN

VOORBEELD 1

Los exact op

a. $3 \cdot 4^{2x+1} = 48$

b. $5^{2x} - 5^{x} = 12$

c. $6^{2x+1} - 6^{x-1} = 1$

OPLOSSING 1

a. $4^{2x+1} = 16 = 4^2$

$2x + 1 = 2$

$2x = 1$

$x = \frac{1}{2}$

b. $(5^x)^2 - 5^x - 12 = 0 \qquad \{Stel \quad 5^x = p\}$

$p^2 - p - 12 = 0$

$(p-4)\cdot(p+3) = 0$

$p = 4 \quad v \quad p = -3$

$5^x = 4 \quad v \quad 5^x = -3\ (KN)$

$x = {}^5\log(4)$

c. $6 \cdot 6^{2x} - 6^{-1} \cdot 6^x = 1$

$6 \cdot 6^{2x} - \frac{1}{6} \cdot 6^x - 1 = 0 \qquad \{Stel \quad 6^x = p\}$

$6 \cdot p^2 - \frac{1}{6} p - 1 = 0$

$36p^2 - p - 6 = 0$

$abc - formule: \quad p = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+216}}{72} = \dfrac{1 \pm \sqrt{217}}{72}$

PARAGRAAF 9.3 : EXPONENTIËLE EN LOGARITMISCHE FORMULES

LES 1 VERDUBBELINGS- EN HALVERINGSTIJD

VOORBEELD 1

Sjors heeft 800 vlinders. Iedere dag daalt de populatie met 6%.

a. Bepaal de formule.

b. Bereken aan het begin van welke dag het aantal vlooien voor het eerst (meer dan) gehalveerd is.

OPLOSSING 1

a. $N = 800 \cdot 0{,}94^t$.

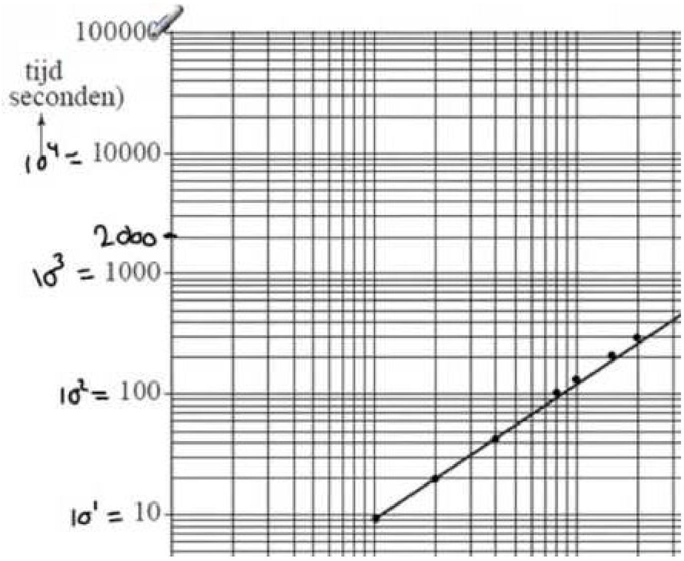
b. $400 = 800 \cdot 0{,}94^t$

$\frac{1}{2} = 0{,}94^t$

$t = {}^{0{,}94}log\left(\frac{1}{2}\right) = 11{,}2$ { Of met intersect als er alleen bereken staat }

Dus op de 12e dag.

LES 2 : FORMULES OP LOGARITMISCH PAPIER



THEORIE LOGARITMISCH PAPIER

Op logaritmisch papier is :

- de macht lineair (iedere keer + 1)
- wordt in een stapje alles 10 keer zo groot
- de formule $y = b \cdot g^t$ (exponentiële) is een rechte lijn (en NIET $y = ax + b$) !!!!

VOORBEELD 1

Aflezen A,B,C,D,E en F op blz. 32 log papier.

STAPPENPLAN EXPONENTIËLE FORMULE

(1) Formule $y = b \cdot g^t$

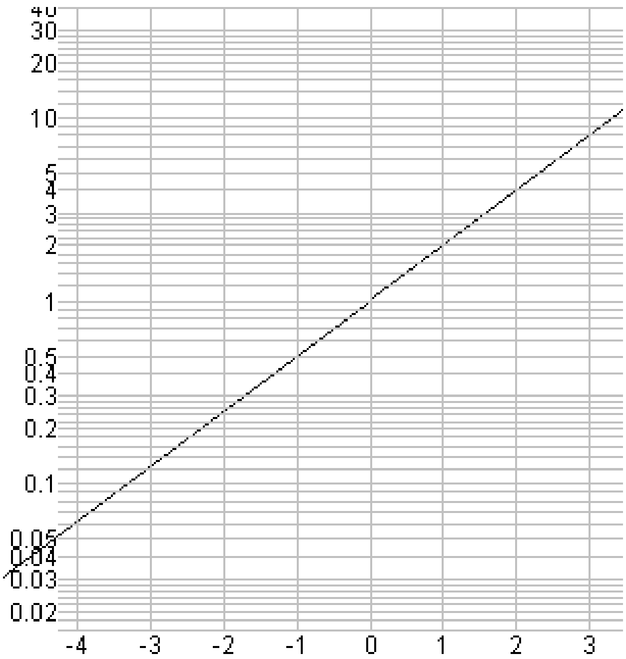
(2) Groeifactor berekenen $g_{\ldots dagen} = \frac{Achterste}{Voorste}$

(3) Beginwaarde b berekenen door een punt in te vullen

(4) Formule opschrijven

VOORBEELD 2

Gegeven is de volgende lijn. Bepaal de formule van de lijn



OPLOSSING 2

Je kunt gebruik maken van het stappenplan uit paragraaf 10.4. Lees twee punten af, bijvoorbeeld $(-1\,, ½\,)$ en $(2{,}4)$

(1) Rechte lijn dus $y = b \cdot g^t$

(2) $g^3 = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$

$g \ = \sqrt[3]{8} = 2$

(3) $y = b \cdot 2^t$ en $(2{,}4)$ invullen $\rightarrow 4 = b \cdot 2^2$

$\rightarrow b = 1$

(4) Dus $y = 1 \cdot 2^t$

OPMERKING

Bij dubbellogpapier zijn beide assen logaritmisch.

LES 3 : VERSCHUIVEN EN VERMENIGVULDIGEN

DEFINITIES TRANSLATIES

- T(p,q) = { Translatie / verschuiving van de grafiek p naar rechts en q omhoog }
- $V_{x\text{-as},\ c}$ = { Vermenigvuldiging t.o.v. de x-as met factor c }
- $V_{y\text{-as},\ c}$ = { Vermenigvuldiging t.o.v. de y-as met factor c }

REGELS BIJ TRANSLATIES

(1) $f(x) \xrightarrow{T(a,b)} f(x-a)+b$

(2) $f(x) \xrightarrow{V_{x-as,c}} c \cdot f(x)$

(3) $f(x) \xrightarrow{V_{y-as,c}} f\left(\frac{1}{c} \cdot x\right)$

VOORBEELD 1

Gegeven is de functie $f(x) = 4^x + 3$.

a. Bepaal de formule die ontstaat als f eerst 5 naar rechts en 2 omlaag verschoven wordt en vervolgens vermenigvuldigd wordt met 3 t.o.v. de x-as.

b. Bepaal de formule die ontstaat als

1. f eerst vermenigvuldigd wordt met $\frac{1}{3}$ t.o.v de y-as
2. Dan 3 naar links verschoven wordt
3. f eerst vermenigvuldigd wordt met -2 t.o.v de x-as

c. Gegeven $g(x) = 4^x$. Welke vermenigvuldiging t.o.v. de x-as is gelijk aan een verschuiving van 2 naar links ?

OPLOSSING 1

a. $4^x + 3 \xrightarrow{T(5,2)} 4^{x-5} + 3 - 2 \xrightarrow{V_{x-as,3}} 3 \cdot (4^{x-5} + 1) = 3 \cdot 4^{x-5} + 3$

b. $4^x + 3 \xrightarrow{V_{y-as,3}} 4^{\frac{1}{1/3}x} + 3 = 4^{3x} + 3 \xrightarrow{T(-3,0)} 4^{3(x-3)} + 3 = 4^{3x-9} + 3$

$4^{3x-9} \xrightarrow{V_{x-as,-2}} -2(4^{3x-9} + 3) = -2 \cdot 4^{3x-9} - 6$

c. $4^x \xrightarrow{T(-2,0)} 4^{x+2} = 4^2 \cdot 4^x = 16 \cdot 4^x$

Dus een vermenigvuldiging van 16 t.o.v. de x-as.

PARAGRAAF 9.4 : HET GETAL E

LES 1 : HET GETAL E

We kijken naar een paar afgeleiden

VOORBEELDEN

a. $f(x) = 2{,}5^x$ $\rightarrow f'(x) = 0{,}916 \cdot 2{,}5^x$

b. $f(x) = 3^x$ $\rightarrow f(x) = 1{,}10 \cdot 3^x$

c. $f(x) = 2{,}718..^x = e^x$ $\rightarrow f\,'(x) = 1 \cdot e^x = e^x$

DIFFERENTIEREN E^X

$f(x) = e^x$ $\rightarrow f\,'(x) = e^x$

OPMERKING

- Omdat e een getal is (en wel = 2,718…) is e^2 = 7,389.. ook een getal en dus alle machten zijn getallen

VOORBEELD 1

Herleid

a. $3e + 6e =$

b. $3e^2 \cdot 13e^2 =$

c. $\frac{e^{2x}-9}{e^x-3} =$

d. $(1+e^{3x})^2 =$

OPLOSSING 1

a. $9e$

b. $39e^4$

c. $\frac{e^{2x}-9}{e^x-3} = \frac{(e^x-3)(e^x+3)}{e^x-3} = e^x + 3$

d. $(1+e^{3x})^2 = (1+e^{3x})(1+e^{3x}) = 1 + e^{3x} + e^{3x} + e^{6x} = e^{6x} + 2e^{3x} + 1$

VOORBEELD 2

Los algebraïsch op

a. $xe^{3x} = 2e^{3x}$

b. $e^{3x} - e^6 = 0$

OPLOSSING 2

a. $xe^{3x} - 2e^{3x} = 0$

$e^{3x}(x-2) = 0$

$e^{3x} = 0 \;\; v \;\; x - 2 = 0$

$3x = {}^{e}log(0) \qquad v \;\; x = 2$

$(K.N.)$

b. $e^{3x} = e^6$

$3x = 6$

$x = 2$

LES 2 : DIFFERENTIËREN VAN E-MACHTEN

DIFFERENTIËREN VAN E-MACHTEN

- Hoofdregel voor e-machten : $f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x$
- Ook bij e-machten kun je productregel, quotiëntregel of kettingregel nodig hebben!!!

VOORBEELD 1

Differentieer

a. $f(x) = 5e^{3x}$

b. $f(x) = 4xe^x$

c. $f(x) = e^{x^2}$

d. $f(x) = \frac{3x-5}{e^{2x}}$

OPLOSSING 1

Differentieer

a. $f'(x) = 5e^{3x} \cdot 3 = 15e^{3x}$

b. $f'(x) = 4xe^x + 4e^x$

c. $f'(x) = \ e^{x^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2}$

d. $f'(x) = \frac{e^{2x} \cdot 2 \cdot (3x-5) - 3e^{2x}}{e^{4x}}$

$f'(x) = \frac{6xe^{2x} - 10e^{2x} - 3e^{2x}}{e^{4x}}$

$f'(x) = \frac{6xe^{2x} - 13e^{2x}}{e^{4x}} =$

$f'(x) = \frac{e^{2x}(6x-13)}{e^{2x} \cdot e^{2x}}$

$f'(x) == \frac{6x-13}{e^{2x}}$

PARAGRAAF 9.5 : DE NATUURLIJKE LOGARITME

LES 1 : WAT IS LN(X)

THEORIE LN(X)

- $ln(x)$ = { de natuurlijke logaritme van x }
- $ln(x) = {}^{e}log(x)$

Omdat ln(x) een logaritme is gelden alle logaritme regels! Bijvoorbeeld :

- $ln(e^x) = {}^{e}log(e^x) = x\{ {}^{g}log(g^x) = x \}$
- $ln(e^3) = 3$

VOORBEELD 1

Los de volgende vergelijkingen exact op.
Denk aan de regel : $g^t = b \Leftrightarrow t = {}^{g}log\,(b)$.

a. $e^x = 10$

b. $e^{2x+1} = 18$

OPLOSSING 1

a. $e^x = 10$

$x = {}^{e}log(10) = ln(10)$

b. $e^{2x+1} = 18$

$2x + 1 = {}^{e}log(18) = ln(18)$

$2x = ln(18) - 1$

$x = \frac{1}{2} ln(18) - \frac{1}{2}$

REKENREGELS LOGARITMEN

De belangrijkste 4 logaritme regels in ln-vorm zijn :

(1)	$ln\ (a) + ln\ (b) = ln\ (a \cdot b)$
(2)	$ln\ (a) - ln\ (b) = ln\ (\frac{a}{b})$
(3)	$ln(a^k) = k \cdot ln(a)$
(4)	$ln\ (e^t)\ =\ t$

VOORBEELD 2

Herleid tot één vorm

a. $ln\ (e^2)\ =$

b. $ln(3)\ +\ ln(13)\ =$

c. $ln^2(e)\ +\ 2\ =$

d. $ln(3)\ +\ 2\ =$

OPLOSSING 2

a. $ln\ (e^2)\ = 2$

b. $ln(3)\ +\ ln(13)\ = ln(3 \cdot 13) = ln(39)$

c. $ln^2(e)\ +\ 2\ =\ (ln(e))^2 + 2 = 1 + 2 = 3$

d. $ln(3)\ +\ 2\ =\ ln(3) + ln\ (e^2)\ = ln(3e^2)$

VOORBEELD 3

Los de vergelijkingen exact op

a. $2x\,ln(x) = ln(x)$

b. $ln(x) - ln(3x+1) = 1$

c. $ln^2(4x) = 9$

OPLOSSING 3

a. $2x\,ln(x) = ln(x)$

$2x\,ln(x) - ln(x) = 0$
$ln(x)\,[\,2x - 1] = 0$
$ln(x) = 0 \;\; v \;\; 2x - 1 = 0$

$x = e^0 = 1 \;\; v \;\; x = ½$

b. $ln\,(x+1) - ln(x) = 1$
$ln\,(\frac{x+1}{x}) = ln(e^1)$
$\frac{x+1}{x} = e$
$x + 1 = ex$
$x - ex = -1$
$x(e-1) = -1$
$x = -\frac{1}{e-1}$

c. $ln^2(4x) = 3$

$(ln(4x))^2 = 9$ { *Neem* $p = ln(4x)$ }

$p^2 = 9$

$p = 3 \;\; v \;\; p = -3$

$ln(4x) = 3 \;\; v \;\; ln(4x) = -3$

$4x = e^3 \;\; v \;\; 4x = e^{-3}$

$x = \frac{1}{4}e^3 \;\; v \;\; x = \frac{1}{4}e^{-3}$

LES 2 : DIFFERENTIËREN VAN EXPONENTIËLE EN LOGARITMISCHE FUNCTIES

DIFFERENTIËREN VAN LOGARITMISCHE FUNCTIES

(1) $f(x) = {}^{g}\log(x) \quad \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x\ln(g)}$ (Hoofdregel)

(2) $f(x) = ln(x) \quad \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

DIFFERENTIËREN VAN EXPONENTIËLE FUNCTIES

(3) $f(x) = a^x \quad \rightarrow f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$ (Hoofdregel)

(4) $f(x) = e^x \quad \rightarrow f'(x) = e^x$

VOORBEELD 1

Differentieer

a. $f(x) = 3xln(x)$

b. $f(x) = \ln(x^2 + 5x)$

c. $f(x) = \ln^3(x)$

d. $f(x) = {}^{3}\log(6x + 7)$

e. $f(x) = 3 \cdot 4^x$

f. $f(x) = 5^{x^2 - 6x}$

OPLOSSING 1

a. $f'(x) = 3x \cdot ln(x) + 3 \cdot \frac{1}{x} = 3xln(x) + \frac{3}{x}$

b. $f'(x) = \frac{1}{x^2+5x} \cdot (2x + 5) = \frac{(2x+5)}{x^2+5x}$

c. Schrijf iets anders : $f(x) = ln^3(x) = (ln\ (x))^3$

$f'(x) = 3 \cdot \ln^2(x) \cdot \frac{1}{x}$

d. $f'(x) = \frac{1}{(6x+7)ln(3)} \cdot 6$

e. $f(x) = 3 \cdot \ln(4) \cdot 4^x$

f. $f(x) = \ln(5) \cdot 5^{x^2-6x} \cdot (2x - 6)$