

## PARAGRAAF 8.1 : LIJNEN EN HOEKEN

### LES 1 LIJNEN

#### DEFINITIES

Je kunt een lijn op verschillende manieren bepalen / opschrijven :

**(1)** RC - manier  $y = ax + b$

→ Handig als je de rc weet

**(2)** Lineaire combinatie :  $ax + by = c$

→ Is een andere a dan bij versie (1)

→ Vaak makkelijk bij stelsel vergelijkingen oplossen

**(3)** Assenvergelijking  $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$

→ (p , 0) en (0 , q) zijn de snijpunten met de assen.

**(4)** Parametervoorstelling :  $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t + 3 \end{cases}$

→ De 3<sup>e</sup> variabele t bepaalt de coördinaten (denk aan de eenheidscirkel)

→ Door t te elimineren kun je deze ook schrijven in vorm (1) of (2)

→ Dit heet ook wel een kromme

---

**VOORBEELD 1**

Gegeven zijn de punten (0,4) en (6,0).

- a. Stel de vergelijking op van deze lijn.
- b. Schrijf deze lijn in de vorm  $ax + by = c$ . Met a, b en c gehele getallen.
- c. Bepaal de vergelijking van de lijn in de vorm  $y = ax + b$

---

**OPLOSSING 1**

a.  $\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1$

- b. Je kunt de eerste vergelijking ook schrijven als

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{4}y = 1$$

Als je aan beide kanten met 24 (=4·6) vermenigvuldigd krijg je :

$$24 \cdot \frac{1}{6}x + 24 \cdot \frac{1}{4}y = 24$$

$$4x + 6y = 24$$

- c. Schrijf de laatste vorm als  $y =$  :

$$4x + 6y = 24$$

$$6y = -4x + 24$$

$$y = -\frac{4}{6}x + 4$$

---

**OPMERKING**

Je had dit opgave c ook kunnen oplossen door de rc met twee punten uit te rekenen :

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-4}{6-0} = -\frac{4}{6} \text{ en vervolgens de b berekenen.}$$

---

**VOORBEELD 2**

Gegeven is de parametervoorstelling  $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t + 3 \end{cases}$

Schrijf deze in de andere twee vormen

---

**OPLOSSING 2**

$y = t + 3 \rightarrow t = y - 3$ . Invullen in de andere geeft :

$$x = 2t + 1$$

$$x = 2(y - 3) + 1$$

$$x = 2y - 6 + 1$$

$$x = 2y - 5$$

**(1)**  $x = 2y - 5$

$$2y = x + 5$$

$$y = \frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$$

**(2)**  $x = 2y - 5$

$$x - 2y = -5$$

$$\frac{x}{-5} + \frac{y}{2,5} = 1$$

---

**OPMERKING**

Je kunt aan de laatste vergelijking zien dat de snijpunten met de assen  $(-5,0)$  en  $(0, 2\frac{1}{2})$  zijn.

**VOORBEELD 3**

Gegeven zijn de lijnen  $l : 2x + py = 10$  en  $k : (p + 5)x + 3y = q$

- a. Voor welke waarde van  $p$  (en  $q$ ) zijn de lijnen evenwijdig
- b. Voor welke waarde van  $p$  (en  $q$ ) zijn de lijnen gelijk.

Neem nu  $p = 2$  en  $q = 19$ .

- c. Los het stelsel op.

**OPLOSSING 3**

- a. Evenwijdig betekent  $rc_l = rc_k$

$$\begin{aligned} (1) \text{ } rc_l \text{ berekenen} & : & 2x + py &= 10 \\ & & py &= -2x + 10 \\ & & y &= \frac{-2}{p}x + \frac{10}{p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ } rc_k \text{ berekenen} & : & (p + 5)x + 3y &= q \\ & & 3y &= -(p + 5)x + q \\ & & y &= \frac{-p-5}{3}x + \frac{q}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \text{ } rc_l = rc_k & : & \frac{-2}{p} &= \frac{-p-5}{3} \\ & & p(-p-5) &= -2 \cdot 3 \\ & & -p^2 - 5p &= -6 \\ & & p^2 + 5p &= 6 \\ & & p^2 + 5p - 6 &= 0 \\ & & (p - 1)(p + 6) &= 0 \\ & & p = 1 \text{ v } p = -6 & \text{ (en } q \text{ maakt niks uit)} \end{aligned}$$

b. Er zijn twee oplossingen voor p. bij elke oplossing moet je de bijbehorende q berekenen :

(1) Neem  $p = 1$ . Vul deze in in de vergelijkingen  $2x + py = 10$  en  $(p + 5)x + 3y = q$  :

$$\begin{array}{l} 2x + y = 10 \text{ en } 6x + 3y = q \quad \{ \text{Vermenigvuldig de eerste vergelijking met 3} \} \\ 6x + 3y = 30 \text{ en } 6x + 3y = q \\ \text{Dus } q = 30 \end{array}$$

(2) Neem  $p = -6$ . Vul deze in in de vergelijkingen  $2x + py = 10$  en  $(p + 5)x + 3y = q$  :

$$\begin{array}{l} 2x - 6y = 10 \text{ en } -x + 3y = q \quad \{ \text{Vermenigvuldig de tweede vergelijking met -2} \} \\ 2x - 6y = 10 \text{ en } 2x - 6y = -2q \\ \text{Deze zijn gelijk als } q = -5 \end{array}$$

c. Neem  $p = 2$  en  $q = 19$  en vul deze in in de vergelijkingen  $2x + py = 10$  en  $(p + 5)x + 3y = q$  :

$$\begin{cases} 2x + 2y = 10 & | \times 3 | \\ 7x + 3y = 19 & | \times 2 | \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + 6y = 30 \\ 14x + 6y = 38 \end{cases} -$$

$$\text{-----}$$

$$-8x = -8 \quad \rightarrow x = 1$$

Invullen in de eerste vergelijking geeft

$$2 \cdot 1 + 2y = 10$$

$$2y = 8$$

$$y = 4$$

Dus het snijpunt = **(1, 4)**

---

#### OPMERKING

- Soms werkt bij het oplossen van gelijke lijnen de methode met de rc niet. Je moet dan gebruik maken van een andere methode :

Gegeven zijn de lijnen  $ax + by = c$  en  $px + qy = r$ .

Deze lijnen zijn gelijk / vallen samen als :  $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$

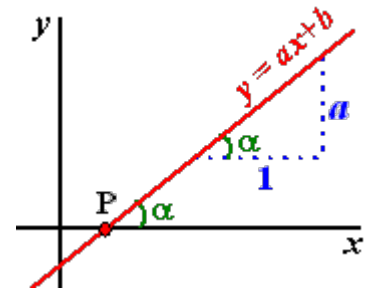
## LES 2 HOEK TUSSEN TWEE LIJNEN

### DEFINITIE HOEKEN VAN LIJNEN

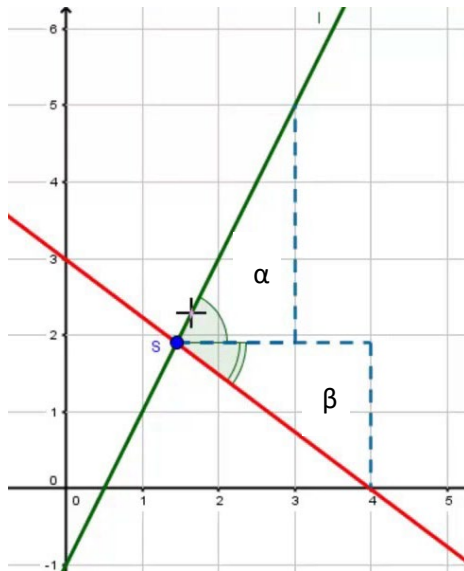
- Voor een hoek  $\alpha$  van een lijn  $k$  en de  $x$ -as geldt :

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{1} = \frac{RC_k}{1} = rC_k$$

$$rC_k = \tan(\alpha)$$



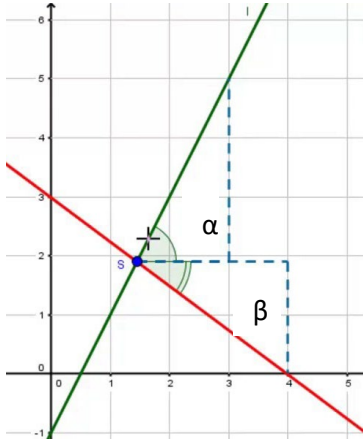
- Als je te maken hebt met twee lijnen, moet je rekenen met twee aparte hoeken :



- Een hoek  $\varphi$  tussen de lijnen  $k$  en  $l$  geldt  $\varphi = \alpha - \beta$ .
- Er geldt  $0 \leq \varphi \leq 90$

**VOORBEELD 1**

Bepaal de hoek tussen de lijnen  $y = 2x - 1$  en  $y = -\frac{3}{4}x + 3$ . (Zie plaatje)

**OPLOSSING 1**

**(1)** Eerst  $\alpha$  bereken :

$$\tan(\alpha) = \frac{2}{1} = 2$$

$$\alpha = 63,4^\circ$$

**(2)** Dan  $\beta$  berekenen

$$\tan(\beta) = -\frac{3}{4}$$

$$\beta = -36,8^\circ$$

**(3)**  $\varphi = \alpha - \beta = 63,4 - (-36,8) = 100,3$

**(4)** Aangezien de hoek altijd kleiner is dan  $90^\circ$  moet je nog één stap uitvoeren :

$$\angle(\text{lijn } k, \text{lijn } l) = 180 - 100,3 = 79,7$$

PARAGRAAF 8.2 : AFSTAND VAN PUNT TOT LIJN

LES 1 : AFSTAND PUNTEN EN LOODRECHTE LIJNEN

**THEORIE LIJNEN – PUNTEN - AFSTANDEN**

- $d(A, B) = \{ \text{De afstand van punt A tot punt B} \}$
- De afstand tussen de punten  $A = (x_a, y_a, z_a)$  en  $B = (x_b, y_b, z_b)$  kun je berekenen met de formule :  $d(A, B) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2 + (z_a - z_b)^2}$  (Pythagoras)
- Het midden van de punten A en B is  $M = (\frac{x_a+x_b}{2}, \frac{y_a+y_b}{2}, \frac{z_a+z_b}{2})$
- Twee lijnen k en m staan loodrecht op elkaar als  $r_{C_k} \times r_{C_m} = -1$ .

---

**VOORBEELD 1**

Gegeven zijn de punten  $A = (3, 5)$  en  $B = (-1, 7)$ .

- a. Bereken de afstand AB.
- b. Bereken het midden M van AB.

Lijn k staat loodrecht op de lijn AB en gaat door het punt M

- c. Bepaal de vergelijking van lijn k.



---

**OPLOSSING 1**

a. De afstand  $d(A, B) = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (5 - 7)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$

b.  $M = \left(\frac{3+(-1)}{2}, \frac{5+7}{2}\right) = (1, 6)$

c. (1)  $rc_{AB} = \frac{7-5}{-1-3} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$

(2)  $rc_{AB} \times rc_M = -1 \rightarrow -\frac{1}{2} \times rc_M = -1 \rightarrow rc_M = 2$

(3)  $M = (1, 6)$  ligt op de lijn  $y = 2x + b$

$$6 = 2 \cdot 1 + b$$

$$b = 4$$

(4)  $y = 2x + 4$

---

**VOORBEELD 2**

Gegeven zijn de punten  $A = (0, p)$  en  $B = (p+1, 7)$ .

Druk AB uit in  $p$  en bereken wanneer deze afstand minimaal is.

---

**OPLOSSING 2**

$$(1) d(A, B) = \sqrt{(p+1-0)^2 + (7-p)^2} = \sqrt{p^2 + 2p + 1 + 49 - 14p + p^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{2p^2 - 12p + 50}$$

(2) Noem deze  $f(p) = \sqrt{2p^2 - 12p + 50}$ . Bepaal het minimum door  $f'(p)=0$  :

$$f'(p) = \frac{1}{2}(2p^2 - 12p + 50)^{-\frac{1}{2}} \cdot (4p - 12)$$

$$f'(p) = \frac{2p-6}{\sqrt{2p^2-12p+50}} = 0$$

$$2p - 6 = 0$$

$$2p = 6$$

$$p = 3 \rightarrow \text{Minimale afstand} = f(3) = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

**LES 2 : AFSTAND PUNT - LIJN**

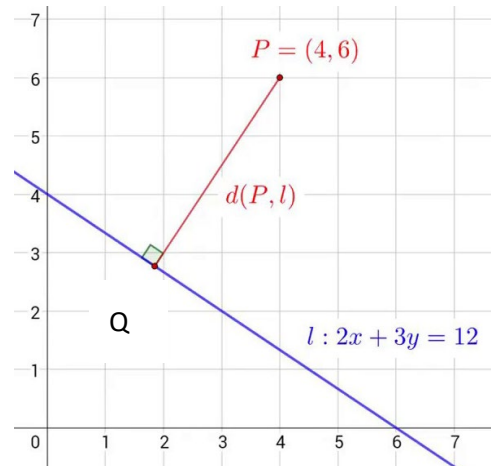
**DEFINITIE**

(1)  $d(P, l) = \{ \text{De afstand van punt } P \text{ tot lijn } l \}$

(2) In het plaatje hiernaast is  $d(P, l) = PQ$

(3) Lijn PQ staat loodrecht op lijn  $l$ .

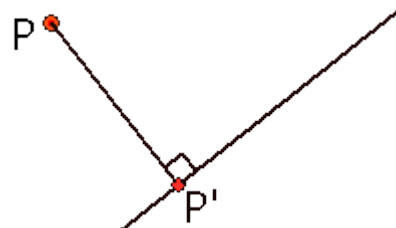
Dus  $rc_l \times rc_{PQ} = -1$



**VOORBEELD 1 (BOEK BLZ 157)**

Gegeven is de lijn  $k : 3x + 2y = 12$ . Lijn  $l$  staat loodrecht op lijn  $k$  en gaat door het punt  $P = (5, 5)$ .

- a. Bepaal de vergelijking van lijn  $l$ .
- b. Bepaal de afstand van  $P$  tot lijn  $k$ .



**OPLOSSING 1**

- a. Schrijf de lijn eerst in de vorm  $y = \dots$  :
- $$3x + 2y = 12$$
- $$2y = -3x + 12$$
- $$y = -1\frac{1}{2}x + 6$$

(1)  $rc_k = -1\frac{1}{2}$

(2)  $rc_{PB} \times rc_M = -1$

$$-1\frac{1}{2} \times rc_M = -1$$

$$rc_M = \frac{2}{3}$$

(3)  $P = (5, 5)$  ligt op de lijn  $y = \frac{2}{3}x + b$

$$5 = \frac{2}{3} \cdot 5 + b$$

$$b = 5 - \frac{10}{3} = \frac{15}{3} - \frac{10}{3} = \frac{5}{3}$$

(4)  $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$

b. Bereken eerst het snijpunt P' van de lijnen  $k$  en  $l$ .

(1) Vul  $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$  in in de vergelijking  $3x + 2y = 12$

$$3x + 2\left(\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}\right) = 12$$

$$3x + \frac{4}{3}x + \frac{10}{3} = 12 \quad (\times 3)$$

$$9x + 4x + 10 = 36$$

$$13x = 26$$

$$x = 2 \qquad \rightarrow y = \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{5}{3} = 3$$

Dus het snijpunt is  $S = (2,3)$

(2) De afstand  $d(P, k) = d(P, P') = \sqrt{(5-2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

---

#### OPMERKING

Als lijn  $k : ax + by = c$  dan is

(1) De richtingsvector van de loodrechte lijn  $l$  is  $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$

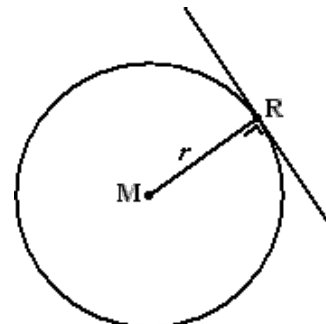
(2) Lijn  $l : bx - ay = c$

(3) Je kunt de  $c$  berekenen door punt  $P$  in te vullen

PARAGRAAF 8.3 CIRKELVERGELIJKINGEN

**DEFINITIE**

- Voor een cirkel met middelpunt  $(p,q)$  geldt de vergelijking :  
 $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$
- De straal staat altijd loodrecht op de raaklijn aan de cirkel.



**VOORBEELD 1**

De lijn  $k : y = 2x + 2$  raakt de cirkel met middelpunt  $(4,5)$ . Bepaal de vergelijking van de cirkel.

**OPLOSSING 1**

- We moeten eerst de vergelijking van MR bepalen.
- Vervolgens kunnen we de straal berekenen en de vergelijking opstellen.

(1) Vergelijking lijn MR is  $y = -\frac{1}{2}x + b$  (loodrecht op lijn k !!)

(2) Lijn MR gaat door  $M = (4,5)$

$$\begin{aligned} \text{Dus : } 5 &= -\frac{1}{2} \cdot 4 + b \\ b &= 7 \end{aligned}$$

(3) Snijpunt MR en lijn k :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}x + 7 &= 2x + 2 \\ -2\frac{1}{2}x &= -5 \\ x = 2 & \qquad \qquad \qquad \rightarrow y = 2 \cdot 2 + 2 = 6 & \qquad \qquad \qquad \rightarrow R = (2,6) \end{aligned}$$

(4)  $r = \sqrt{(4 - 2)^2 + (5 - 6)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$

(5) Voor cirkel geldt de vergelijking :  $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = (\sqrt{5})^2 \rightarrow (x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 5$

---

**VOORBEELD 2**

Gegeven  $x^2 + 12x + y^2 + 20 = 0$ .

- a. Bereken de coördinaten van het middelpunt en de bijbehorende straal.

Gegeven het punt  $A = (1,2)$

- b. Ligt punt A binnen of buiten de cirkel  
c. Bereken de afstand van  $A = (1,2)$  tot de cirkel.

---

**OPLOSSING 2**

- a. Omdat  $(x+6)^2 = x^2 + 12x + 36$  geldt

$$(1) (x+6)^2 - 36 + y^2 + 20 = 0$$

$$(2) (x+6)^2 + y^2 = 36 - 20$$

$$(x+6)^2 + y^2 = 16 = 4^2$$

- (3) Middelpunt  $M = (-6,0)$  en  $r = 4$

- b. De afstand  $d(A, M) = \sqrt{(1 - (-6))^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{49 + 4} = \sqrt{53}$

Omdat  $\sqrt{53} > 4$  ligt A buiten de cirkel

- c. Afstand tot de cirkel =  $\sqrt{53} - 4$

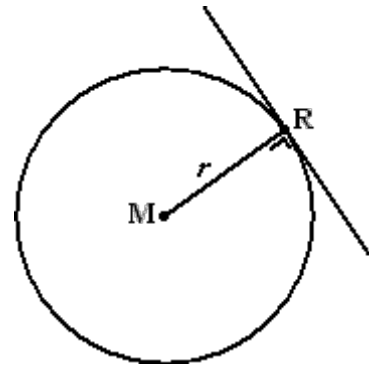
PARAGRAAF 8.4 RAAKLIJN EN SNIJPUNTEN BIJ CIRKEL

LES 1 : RAAKLIJN AAN CIRKEL OPSTELLEN

VOORBEELD 1

Punt  $R = (3, 6)$  ligt op de cirkel  $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 5$

Stel een vergelijking op van de raaklijn  $k$  in punt  $R$ .



OPLOSSING 1

We moeten eerst de  $rc$  van lijn  $r$  weten en dan is het herhaling :

(1) Middelpunt  $M = (4,5)$ .

(2)  $rc_r = \frac{6-5}{3-4} = \frac{1}{-1} = -1$ .

(3)  $rc_r \times rc_k = -1 \rightarrow -1 \times rc_k = -1 \rightarrow rc_k = 1$

(4) Vergelijking lijn  $k$  is  $y = 1 \cdot x + b \rightarrow y = x + b$

(5) Lijn gaat door  $R = (3,6)$  dus :  $6 = 3 + b \rightarrow b = 3$

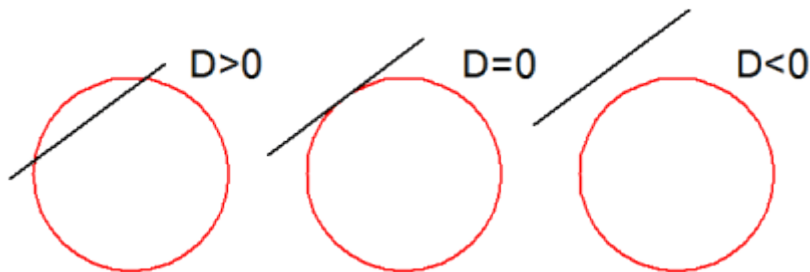
(6) Lijn  $k : y = x + 3$

## LES 2 : SNIJPUNTEN VAN LIJN EN CIRKEL

### DEFINITIE

Als een lijn  $y = ax + b$  en de cirkel  $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$  elkaar snijden dan kunnen er:

- (1) Twee snijpunten zijn  $\rightarrow D > 0$
- (2) Eén snijpunt zijn  $\rightarrow D = 0$
- (3) Geen snijpunt zijn  $\rightarrow D < 0$





**VOORBEELD 1**

Gegeven is de cirkelvergelijking  $(x + 6)^2 + y^2 = 16$  en de lijn k met vergelijking  $y = ax + 1$ .

- a. Neem  $a = 1$ . Bereken de x-coördinaten van de snijpunten van lijn k en de cirkel.
- b. Voor exact welke a de lijn  $y = ax + 1$  de raaklijn is.

**OPLOSSING 1**

- a. Vul  $y = x + 1$  in in  $(x + 6)^2 + y^2 = 16$ . Dit geeft :

$$(x + 6)^2 + (x + 1)^2 = 16$$

$$x^2 + 12x + 36 + x^2 + 2x + 1 = 16$$

$$2x^2 + 14x + 21 = 0$$

$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot 2 \cdot 21}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{196 - 168}}{4}$$

$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{196 - 168}}{4}$$

$$x = \frac{-14 + \sqrt{28}}{4} \quad \vee \quad x = \frac{-14 - \sqrt{28}}{4}$$

- b. Vul  $y = ax + 1$  in in  $(x + 6)^2 + y^2 = 16$ . Dit geeft :

**(1)** Vul  $y = ax + 1$  in :

$$(x + 6)^2 + (ax + 1)^2 = 16$$

$$x^2 + 12x + 36 + a^2x^2 + 2ax + 1 = 16$$

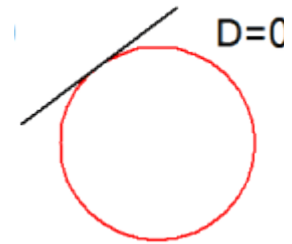
$$(a^2 + 1)x^2 + (12 + 2a)x + 21 = 0$$

(2) Deze raakt de cirkel als de D gelijk is aan nul :

$$D = (12 + 2a)^2 - 4(a^2 + 1) \cdot 21$$

$$D = 4a^2 + 48a + 144 - 84a^2 - 84 = 0$$

$$D = -80a^2 + 48a + 60 = 0$$



(3) Oplossen met abc-formule

$$D = 48^2 - 4 \cdot -80 \cdot 60 = 21504$$

$$a = \frac{-48 + \sqrt{21504}}{-160} \quad \vee \quad a = \frac{-48 - \sqrt{21504}}{-160}$$