

PARAGRAAF 5.1 : WORTELVORMEN EN BREUKEN

LES 1 : WORTELFORMULES, DOMEIN EN BEREIK

DEFINITIES

- Domein = { alle x-en die je mag invullen in de formule }
- Bereik = { alle y-waarden die als uitkomst uit de formule kunnen komen }

STAPPENPLAN DOMEIN EN BEREIK BEPALEN:

- (1) Bereken de coördinaten van het beginpunt (wortel = 0)
- (2) Bereken met GR een aantal punten een schets de grafiek.
- (3) Lees uit de grafiek het domein en bereik af.

VOORBEELD 1

- a. Bepaal het domein en bereik van $f(x) = 2 - \sqrt{x + 4}$
- b. Los algebraïsch op : $f(x) > -1$
- c. Schrijf x als functie van y bij de formule $y = 2 - \sqrt{x + 4}$

OPLOSSING 1

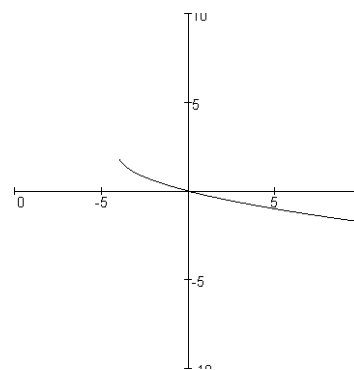
a. (1) $x + 4 = 0$

$$x = -4 \quad \rightarrow y = 2$$

$$\text{Beginpunt} = (-4, 2)$$

(2) $Y1 = 2 - \sqrt{x + 4}$ geeft de volgende schets :

(3) $D_f = [-4, \rightarrow >$ en $B_f = \leftarrow \leftarrow , 2]$



b. Een ongelijkheid bestaat altijd uit drie stappen

(1) Los de gelijkheid op $2 - \sqrt{x + 4} = -1$

$$\sqrt{x + 4} = 3$$

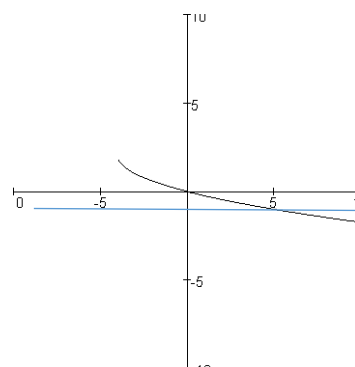
$$x + 4 = 9$$

$$x = 5$$

(2) Maak een schets :

(3) Lees de oplossing af en let op het randpunt !!!

$$-4 \leq x < 5$$



c. $y = 2 - \sqrt{x + 4}$

$$y - 2 = -\sqrt{x + 4}$$

$$-y + 2 = \sqrt{x + 4}$$

$$y^2 - 4y + 4 = x + 4$$

$$x = y^2 - 4y$$

OPMERKINGEN

- Om de wortelgrafiek te tekenen heb je stap 1 en 2 nodig. Uiteraard moet je dan bij stap 2 een aantal punten precies uitrekenen en de grafiek netjes tekenen.
- Je kunt ook gebruik maken van translaties. We bespreken dat pas in paragraaf 5.3.

LES 2 : BREUKEN EN ASYMPTOTEN**DEFINITIE ASYMPTOTEN**

Asymptoot = { Lijn waar de grafiek steeds dichterbij komt, maar waar hij nooit komt }

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ = { de limiet voor x gaat naar oneindig. Waar gaat $f(x)$ dan naar toe ? }

SOORTEN ASYMPTOTEN

Er zijn twee soorten asymptoten :

(1) Horizontale Asymptoot (HA)

- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ (d.w.z. voor x een groot getal invullen)
- Vergelijking : $y = \text{getal}$

(2) Verticale Asymptoot (VA)

- Noemer = 0
- Vergelijking : $x = \text{getal}$

VOORBEELD 1

Bepaal alle asymptoten en schets de grafiek van :

a. $f(x) = \frac{6x-24}{3x+6}$

b. $g(x) = 1 + \frac{2x-4}{x-5}$

c. $h(x) = \frac{|x-4|}{x+2}$

OPLOSSING 1**a. (1) Horizontale Asymptoot (HA)**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x - 24}{3x + 6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 - \frac{24}{x}}{3 + \frac{6}{x}} = \frac{6 - 0}{3 + 0} = 2$$

Dus HA : $y = 2$

(2) Verticale Asymptoot (VA)

$$3x + 6 = 0 \rightarrow x = -2$$

Dus VA : $x = -2$

b. (1) Horizontale Asymptoot (HA)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{2x - 4}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{2 - \frac{4}{x}}{1 - \frac{5}{x}} = 1 + \frac{2 - 0}{1 - 0} = 1 + 2 = 3$$

Dus HA : $y = 3$

(2) Verticale Asymptoot (VA)

$$x - 5 = 0 \rightarrow x = 5.$$

Dus VA : $x = 5$

c. (1) Horizontale Asymptoot (HA)

Omdat er een absoluut-teken staat, moet je de twee gevallen ∞ en $-\infty$ apart bekijken :

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x-4|}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-4}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{4}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

Dus HA : $y = 1$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x-4|}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-(x-4)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1 + \frac{4}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{-1+0}{1+0} = -1$$

Dus HA : $y = -1$

(2) Verticale Asymptoot (VA)

$$x + 2 = 0 \rightarrow x = -2.$$

Dus VA : $x = -2$

VOORBEELD 2

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{3x-5}{x+2}$

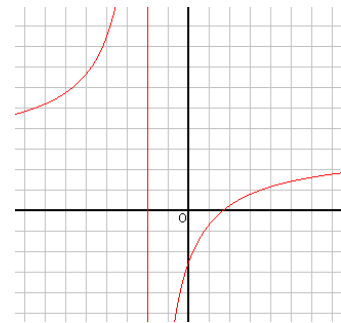
- a. Schets de grafiek van f .
- b. Los op $f(x) \geq -x + 4$

OPLOSSING 2

- a. Verticale asymptoot: $x + 2 = 0$ dus $x = -2$

$$\text{Horizontale asymptoot: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-5}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-\frac{5}{x}}{1+\frac{2}{x}} = \frac{3-0}{1+0} = 3$$

$$Y1 = \frac{3x-5}{x+2} \text{ geeft}$$



- b. $\frac{3x-5}{x+2} \geq -x + 4$

$$(1) Y1 = \frac{3x-5}{x+2}$$

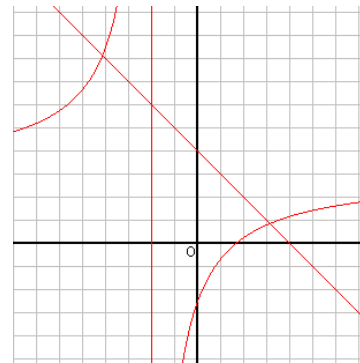
$$Y2 = -x + 4$$

$$(2) [-15,15] \times [-15,15]$$

(3) Schets :

(4) calc intersect

$$(5) x = -4,14 \text{ v } x = 3,14$$



Oplossing aflezen uit de schets $-4,14 \leq x < -2$ v $x \geq 3,14$

PARAGRAAF 5.2 : MACHTEN (NEGATIEF EN GEBROKEN)

LES 1 : MACHTSREGELS

MACHTSREGELS

(1) $a^p \times a^q = a^{p+q}$

(2) $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

(3) $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$

(4) $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$

(5) $a^0 = 1$

(6) $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$

(7) $(a)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

(8) $(a)^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^p}$

VOORBEELD

$a^3 \times a^5 = a^{3+5} = a^8$

$\frac{a^{10}}{a^2} = a^{10-2} = a^8$

$(a^3)^4 = a^{3 \cdot 4} = a^{12}$

$(a \cdot b)^3 = a^3 \cdot b^3$

$7^0 = 1$

$a^{-3} = \frac{1}{a^3}$

$(a)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$

$(a)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{a^3}$

Er zijn ook twee speciale gevallen die vaak voorkomen

(9) $a^{-1} = \frac{1}{a^1} = \frac{1}{a}$

$5^{-1} = \frac{1}{5^1} = \frac{1}{5}$

(10) $(a)^{1/2} = \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$

$(6)^{1/2} = \sqrt[2]{6} = \sqrt{6}$

VOORBEELD 1

Schrijf als macht van x

a. $x^3\sqrt{x}$

b. $\frac{\sqrt{x}}{x}$

c. $\sqrt[3]{x} \cdot \frac{1}{x^2}$

Schrijf zonder gebroken en negatieven machten

d. $x^{-\frac{3}{4}}$

e. $x^{-2\frac{1}{2}}$

OPLOSSING 1

a. $x^3\sqrt{x} = x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{3\frac{1}{2}}$

b. $\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^1} = x^{\frac{1}{2}-1} = x^{-\frac{1}{2}}$

c. $\sqrt[3]{x} \cdot \frac{1}{x^2} = x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{-2} = x^{-1\frac{2}{3}}$

d. $x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$

e. $x^{-2\frac{1}{2}} = \frac{1}{x^{2\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^2\sqrt{x}}$

VOORBEELD 2

Los algebraïsch op. Rond af op 3 decimalen.

a. $3x^{-3,2} = 12$

b. $5\sqrt[4]{x^3} + 17 = 87$

OPLOSSING 2

a. $3x^{-3,2} = 12$

$$x^{-3,2} = 4$$

$$x = 4^{\frac{1}{-3,2}} = 0,648$$

b. $5\sqrt[4]{x^3} + 17 = 87$

$$5\sqrt[4]{x^3} = 70$$

$$x^{\frac{3}{4}} = 14$$

$$x = 14^{\frac{4}{3}} = 33,742$$

VOORBEELD 3

Maak de x vrij in de formule $y = 5\sqrt[4]{x^3}$

OPLOSSING 3

$$5\sqrt[4]{x^3} = y$$

$$x = \left(\frac{1}{5}y\right)^{\frac{4}{3}}$$

$$x = \left(\frac{1}{5}y\right)^{\frac{4}{3}}$$

$$x = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{4}{3}} \cdot (y)^{\frac{4}{3}}$$

$$x = 0,117y^{\frac{4}{3}}$$

PARAGRAAF 5.3 : STANDAARDFUNCTIE $F(x) = GX$

LES 1 : TRANSFORMATIES

DEFINITIES TRANSFORMATIES

- $T(p,q) = \{ \text{Translatie / verschuiving van de grafiek p naar rechts en q omhoog} \}$
- $V_{x-as, c} = \{ \text{Vermenigvuldiging t.o.v. de x-as met factor c} \}$

REGELS BIJ TRANSFORMEREN

$$(1) f(x) \xrightarrow{T(a,b)} f(x - a) + b$$

$$(2) f(x) \xrightarrow{V_{x-as,c}} c \cdot f(x)$$

ASYMPTOTEN BIJ EXPONENTIELE FUNCTIES

Een exponentiele functie heeft alleen Horizontale Asymptoten. Je berekent die door de limiet ∞ of $-\infty$ te nemen.

VOORBEELD 1

Gegeven is de functie $f(x) = 4^x$. Bepaal de formule die ontstaat als :

- f eerst 5 naar rechts / 2 omlaag en vervolgens vermenigvuldigd wordt met 3. Noem deze formule $g(x)$.
- f eerst vermenigvuldigd wordt met -2 en dan 3 naar links verschoven wordt.
- Bepaal de asymptoten van $g(x)$
- Los op $g(x) > 12$

OPLOSSING 1

a. $4^x \xrightarrow{T(5,2)} 4^{x-5} + 2 \xrightarrow{V_{x-as,3}} 3 \cdot (4^{x-5} + 2) = 3 \cdot 4^{x-5} + 6 = g(x)$

b. $4^x \xrightarrow{V_{x-as,-2}} -2 \cdot 4^x \xrightarrow{T(-3,0)} -2 \cdot 4^{x-3} = -2 \cdot 4^{x+3}$

c. Horizontale Asymptoot (HA)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 3 \cdot 4^{x-5} + 6 = \infty (\text{geen HA})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 3 \cdot 4^{x-5} + 6 = 3 \cdot 4^{-\infty} + 6 = \frac{3}{4^\infty} + 6 = 0 + 6 = 6$$

Dus HA : $y = 6$

Er zijn geen VA

d. Een ongelijkheid bestaat altijd uit drie stappen

(1) Los de gelijkheid op $3 \cdot 4^{x-5} + 6 = 12$

$$3 \cdot 4^{x-5} = 6$$

$$4^{x-5} = 2$$

$$4^{x-5} = 4^{\frac{1}{2}}$$

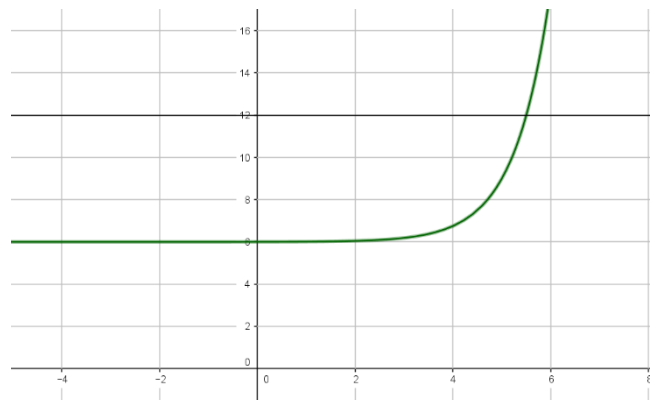
$$x - 5 = \frac{1}{2}$$

$$x = 5\frac{1}{2}$$

(2) Maak een schets :

(3) Lees de oplossing af uit de schets

$$x > 5\frac{1}{2}$$



LES 2 : EXPONENTIËLE VERGELIJKINGEN OPLOSSEN

VOORBEELD 1

Los algebraïsch op

a. $3^{5-x} = \frac{1}{27}$

b. $32^x = \left(\frac{1}{8}\right)^{x+3}$

c. $2^{x-2} + 2^{x+1} = 9\sqrt{2}$

OPLOSSING 1

a. $3^{5-x} = \frac{1}{27}$

$$3^{5-x} = 3^{-3}$$

$$5 - x = -3$$

$$x = 8$$

b. $32^x = \left(\frac{1}{8}\right)^{x+3}$

$$(2^5)^x = (2^{-3})^{x+3}$$

$$2^{5x} = 2^{-3x-9}$$

$$5x = -3x - 9$$

$$8x = -9$$

$$x = -\frac{9}{8}$$

c. $2^{x-2} + 2^{x+1} = 9\sqrt{2}$

$$2^x \cdot 2^{-2} + 2^x \cdot 2^1 = 9\sqrt{2}$$

$$2^x \cdot \frac{1}{4} + 2^x \cdot 2 = 9\sqrt{2}$$

{ Neem $p = 2^x$ }

$$\frac{1}{4}p + 2p = 9\sqrt{2}$$

$$2\frac{1}{4}p = 9\sqrt{2}$$

{ Vul nu voor p weer 2^x terug in }

$$p = 4\sqrt{2} = 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{2\frac{1}{2}}$$

$$2^x = 2^{2\frac{1}{2}}$$

$$x = 2\frac{1}{2}$$

PARAGRAAF 5.4 : EXPONENTIËLE GROEI

THEORIE EXPONENTIELE FORMULE

(1) Formule $y = b \times g^t$
 g = groeifactor
 b = begingetal

(2) Tabel ledere keer vermenigvuldigd met bijv. 1,1

<i>tijd</i> (uur)	0	1	2	3
<i>hoeveelheid</i>	100	110	121	133,1

(3) Je gebruikt exponentiële formule als :

- Je iedere keer met hetzelfde getal vermenigvuldigt (bijv. keer 2)
- Er iedere keer een vast percentage erbij komt of eraf gaat (bijv. +3% of -11%)

(4) Schema groeifactor berekenen

(1) + 3%	Oud		Nieuw		Groeifactor
	100%	$\xrightarrow{+3\%}$	103%	$\xrightarrow{:100}$	1,03
(2) - 11%	Oud		Nieuw		
	100%	$\xrightarrow{-11\%}$	89%	$\xrightarrow{:100}$	0,89

VOORBEELD 1

Gegeven is het aantal dieren op de boerderij "Beestenboel".

Jaar	1	2	3	4
Dieren	70	105	157	136

- Toon aan dat het exponentieel verband is tussen het aantal dieren en het aantal jaren.
 - Stel de formule op.
 - Bereken de groeifactor per 3 jaar.
 - Bereken de groeifactor per half jaar.
 - Bereken het groeipercentage per maand.
- Op boerderij "Dierenlief" is het aantal dieren in jaar 5 precies 500. In jaar 9 zijn er 1100 dieren. Het aantal dieren groeit met een vast percentage per jaar.
- Stel de formule op van het aantal dieren.

OPLOSSING 1

a. $\frac{105}{70} = 1,5$ $\frac{157}{105} = 1,5$ $\frac{236}{157} = 1,5$ \rightarrow Gelijk dus exponentieel

b. $b = \frac{70}{1,5} = 46,67$
 $y = 46,67 \times 1,5^t$.

c. $g_{3 \text{ jaar}} = 1,5^3 = 3,375$

d. $g_{0,5 \text{ jaar}} = 1,5^{0,5} = 1,22$

e. $g_{1/12 \text{ jaar}} = 1,5^{\frac{1}{12}} = 1,034$
 Dus 3,4 %

f. (1) Bereken de groeifactor $g^4 = \frac{1100}{500} = 2,2$
 $g = 1,22$

(2) Bereken de b $1100 = b \times 1,22^9$
 $b = \frac{1100}{1,22^9} = 167$

(3) Dus $y = 167 \cdot 1,22^t$.