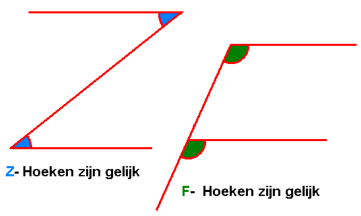
PARAGRAAF 4.1 : GELIJKVORMIGHEID

LES 1 : GELIJKVORMIGHEID

DEFINITIES

- $\sin(\angle A) = \frac{Overstaande}{Schuine} = \frac{O}{S}$
- $\cos(\angle A) = \frac{Aanliggende}{Schuine} = \frac{A}{S}$
- $\tan(\angle A) = \frac{Overstaande}{Aanliggende} = \frac{O}{A}$
- Een ezelsbruggetje om dit te onthouden is : ***CasSosToa of SosCasToa***
- F-hoeken en Z-hoeken



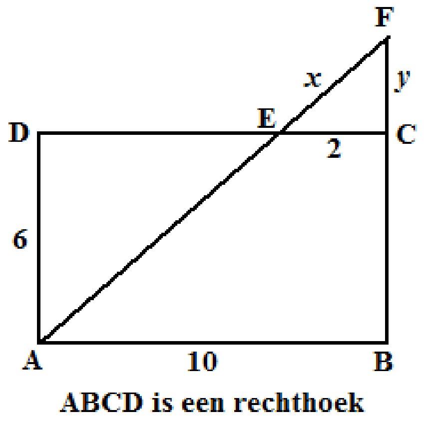
THEORIE GELIJKVORMIGHEID

- Twee driehoeken zijn gelijkvormig als twee hoeken gelijk zijn.
- Notatie : $\triangle ABC \propto \triangle PQR$
- D.w.z. dat $\angle A = \angle P$; $\angle B = \angle Q$; $\angle C = \angle R$. (Dus let op de volgorde !!!)
- Om zijden te berekenen maak je een gelijkvormigheidsschema :

AB = …	AC = …	BC = …
PQ = …	PR = …	QR = …

VOORBEELD 1

Gegeven is rechthoek ABCD met uitbreiding.



a. Bereken $\angle A$

b. Toon aan dat $\triangle ADE$ en $\triangle EFC$ gelijkvormig zijn.

c. Bereken y en x

OPLOSSING 1

a. $\tan(\angle A) = \frac{DE}{AD} = \frac{8}{6}$

$\angle A = 53$

b. $\angle A = \angle F\ (Z - hoek)$

$\angle D = \angle C = 90$

Dus $\triangle ADE \propto \triangle ECF$

c. Maak een gelijkvormigheidsschema.

AD = 6	AE =	DE = 8
EC = 2	EF = x	CF = y

(1) Je kunt nu berekenen dat $y = \frac{8 \cdot 2}{6} = \frac{16}{6} = 2\frac{2}{3}$

(2) Om x te berekenen moet je eerst Pythagoras doen :

$AE^2 = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$

(3) Vul in :

AD = 6	AE =10	DE = 8
EC = 2	EF = x	CF = y

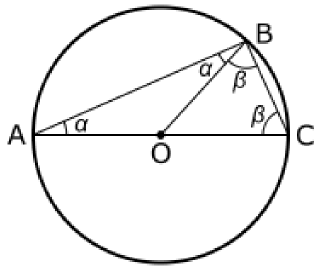
Je kunt nu berekenen dat $x = \frac{10 \cdot 2}{6} = \frac{20}{6} = 3\frac{1}{3}$

LES 2 : THALES EN RAAKLIJNEN

Er zijn een aantal belangrijke stellingen die betrekking hebben op cirkels :

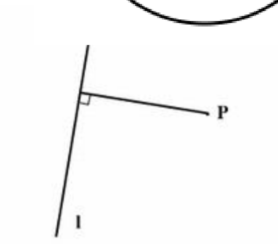
(1) STELLING VAN THALES

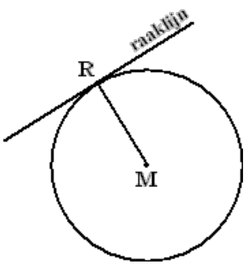
- Als C op de cirkel met middellijn AB ligt, dan is $\angle C = 90$.
- Als $\angle C = 90$ dan is AB de middellijn AB.



(2) STELLING AFSTAND PUNT – LIJN

De afstand van een punt P tot lijn l is altijd de loodrechte (en dus kortste afstand).



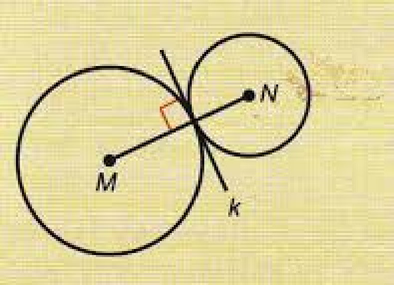


(3) STELLING RAAKLIJN AAN CIRKEL

Als de lijn l de cirkel raakt in punt R dan staat lijn MR (de straal) loodrecht op lijn l ($l \perp MR$)

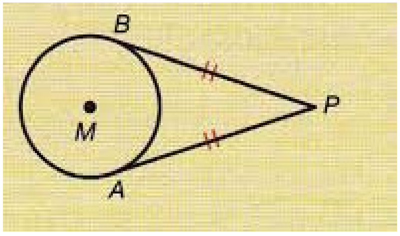
(4) TWEE RAKENDE CIRKELS EN VERBONDEN MIDDELPUNTEN

De raaklijn k in het gemeenschappelijke punt staat loodrecht op lijn MN (lijn door middelpunten)



(5) RAAKLIJNEN AAN CIRKEL VANUIT PUNT P BUITEN CIRKEL

Teken de raaklijnen k en l vanuit P aan de cirkel.
Dan geldt $PA = PB$.

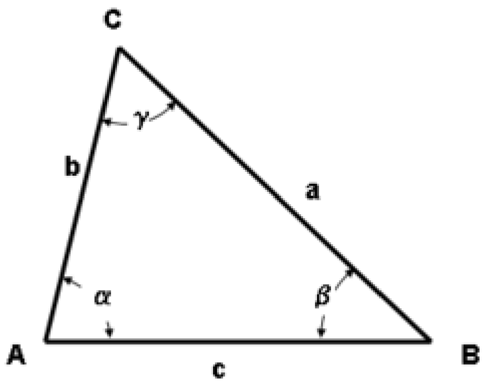


VOORBEELD 1

Maak opgave 16 uit boek.

PARAGRAAF 4.2 : DE SINUS- EN COSINUSREGEL

Er zijn twee belangrijke regels waarmee je in niet-rechthoekige driehoeken de zijden en hoeken van een driehoek kunt berekenen.



REGEL 1 : DE SINUSREGEL

- $a = BC \quad b = AC \quad c = AB$ (de letter die er niet in zit)
- $\angle A = \alpha \quad \angle B = \beta \quad \angle C = \gamma$
- Dan geldt de sinusregel :

$$\boxed{\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}}$$

REGEL 2 : DE COSINUSREGEL

- $a = BC \quad b = AC \quad c = AB$ (de letter die er niet in zit)
- $\angle A = \alpha \quad \angle B = \beta \quad \angle C = \gamma$
- Dan geldt de cosinusregel :

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)}$$

- Let op : de hoek (α) moet de hoek zijn tegenover de zijde !!!!

VOORBEELD 1

Gegeven is ΔABC met b = 10, β = 66° en γ= 73°.

Bereken a en c in één decimaal nauwkeurig.

OPLOSSING 1

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

(1) α = 180 – 66 – 73 = 41°

(2) $\frac{a}{\sin 41} = \frac{10}{\sin 66} = \frac{c}{\sin 73}$

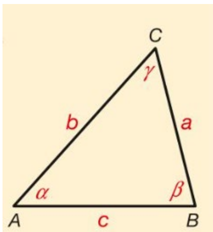
(3) $a = \frac{10 \cdot \sin 41}{\sin 66}$ = 7,2

(4) $c = \frac{10 \cdot \sin 73}{\sin 66}$ = 10,5

VOORBEELD 2

Gegeven is ΔABC met $a = 6,\ b = 8\, en\, c = 9$

Bereken β in graden nauwkeurig.



OPLOSSING 1

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$8^2 = 6^2 + 9^2 - 2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \cos\beta$$
$$64 = 117 - 108 \cdot \cos\beta$$
$$108 \cdot \cos\beta = 53$$
$$\cos\beta = \frac{53}{108}$$
$$\beta = 61° \quad (\cos^{-1}(53:108))$$

VOORBEELD 3

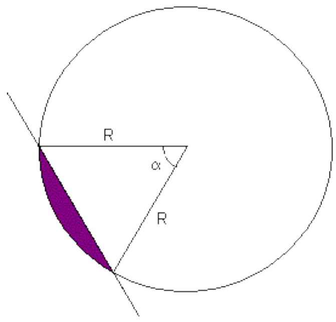
Maak opgave 26 uit boek.

VOORBEELD 4

Maak opgave 36 uit boek.

PARAGRAAF 4.3 : LENGTE EN OPPERVLAKTE BEREKENEN

LES 1 : CIRKELSEGMENT / TAARTPUNT



VOORBEELD 1

Gegeven is de figuur hiernaast met $R = 6$ en $\alpha = 70$ graden. Bereken de oppervlakte van het paarse stuk. Rond af op twee decimalen.

OPLOSSING 1

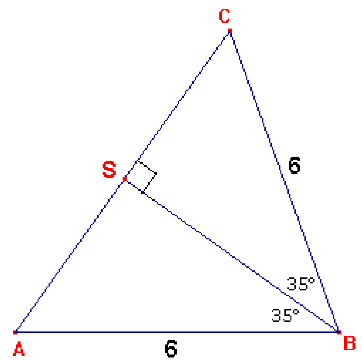
Om de oppervlakte uit te rekenen moet je een aantal stappen doen :

(1) Opp. Paars = Opp. Cirkelsegment – Opp. Driehoek
Opp. Paars = Opp. Taartpunt – Opp. Driehoek

(2) Opp. Cirkel = $\pi R^2 = \pi \cdot 6^2 = 36\pi$
Opp taartpunt = $\frac{70}{360} \times Opp\ cirkel = \frac{70}{360} \times 36\pi = 7\pi$

(3) Opp. Driehoek ABC = $\frac{1}{2} \times BS \times AC$

- $\cos(35) = \frac{BS}{6} \rightarrow \mathrm{BS} = 6\cos(35) \quad (= 4{,}91 \ldots)$
- $\sin(35) = \frac{AS}{6} \rightarrow \mathrm{AS} = 6\sin(35) \quad (= 3{,}44 \ldots)$
- $\mathrm{AC} = 2\mathrm{AS} = 12\sin(35) \quad (= 6{,}88 \ldots)$
- $Opp\ \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 6\cos(35) \times 12\sin(35) = 16{,}91446717$



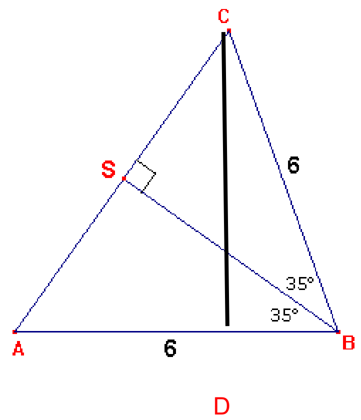
(4) Opp. Paars = Opp. Taartpunt – Opp. Driehoek
Opp. Paars = 7π - 16,91446717 = 5,08

OPMERKING

Je kunt stap (3) ook sneller doen, door de hoogtelijn vanuit punt C te nemen. Dan is

$sin(70) = \frac{CD}{6} \rightarrow CD = 6\,sin(70) \quad (= 5{,}63 \ldots)$

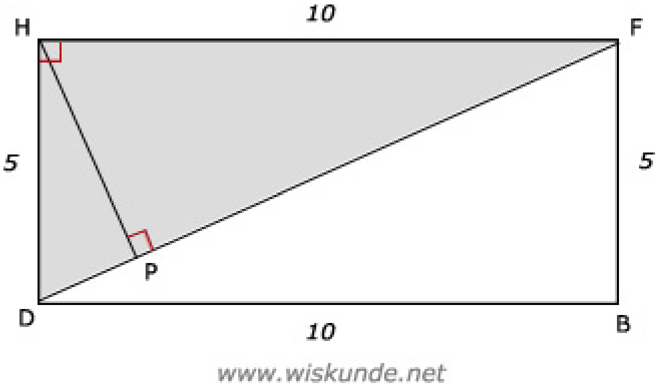
$Opp\ \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 6\cos(70) \times 6 = 16{,}9144$



LES 2 : DE ZIJDE – HOOGTEMETHODE

VOORBEELD 1

Gegeven is de figuur hierbeneden. Bereken de zijde HP.



OPLOSSING 1

De zijde-hoogtemethode maakt eigenlijk gebruik van het feit dat je de oppervlakte van een driehoek kunt bereken met verschillende bases.

(1) $Opp\ \triangle DFH = \frac{1}{2} \times HD \times HF = \frac{1}{2} \times FD \times HP$

(2) Bereken de ontbrekende zijde :

$DF^2 = BD^2 + BF^2$
$DF^2 = 10^2 + 5^2 = 125$
$DF = \sqrt{125}$

(3) Vul in en bereken HP :

$$Opp\ \triangle DFH = \frac{1}{2} \times 5 \times 10 = \frac{1}{2} \times \sqrt{125} \times HP$$
$$HP = \frac{50}{\sqrt{125}}$$

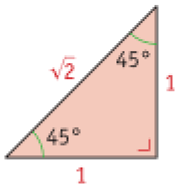
OPMERKING

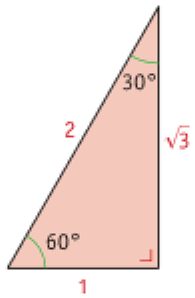
Omdat aan beide zijden de half kan worden weggelaten, hoef je die in de berekening niet mee te nemen (maar maakt het wel duidelijker).

PARAGRAAF 4.4 : VERGELIJKINGEN IN DE MEETKUNDE

DEFINITIE BIJZONDERE DRIEHOEKEN

Er zijn twee bijzondere driehoeken die vaak terugkomen (afbeelding staat eronder):





(1) De 45-45-90 driehoek

De verhouding van de zijden is $1 : 1 : \sqrt{2}$ (laatste is schuine zijde)

(2) De 30-60-90 driehoek

De verhouding van de zijden is $1 : \sqrt{3} : 2$ (laatste is schuine zijde)

Je kunt dit vaak gebruiken om eenvoudig bepaalde zijden uit te rekenen.

VOORBEELD 1

Gegeven is trapezium ABCD met loodlijnen BE en CF op AB. Gegeven is ook dat BE = 8 en $\angle A = 60$ en $\angle D = 45$

a. Bereken de lengte van AE en FD

De oppervlakte van EFCB is 5 keer de oppervlakte van AEB.

b. Bereken de lengte van BC.

OPLOSSING 1

a. AEB is een 30-60-90 driehoek.

Dus AE : EB : AB = 1 : √3 : 2 = AE : 8 : AB

$$AE = \frac{8}{\sqrt{3}} \times 1 = \frac{8}{\sqrt{3}}$$

CFD is een 45-45-90 driehoek. Dus FD = CF = 8.

b. $AB = 2AE = 2 \times \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{16}{\sqrt{3}}$

$$Opp\ \triangle ABE = \frac{1}{2} \times AE \times AB = \frac{1}{2} \times \frac{16}{\sqrt{3}} \times \frac{8}{\sqrt{3}} = 21\frac{1}{3}$$

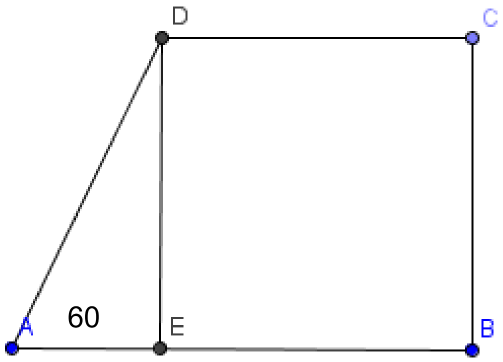
$$Opp\ EFCB = 5 \times \triangle ABE = 5 \times 21\frac{1}{3} = 106\frac{2}{3}$$

$$EF = 106\frac{2}{3} : 8 = 13\frac{1}{3}$$

VOORBEELD 2

De omtrek van vierhoek ABCD is 30 met EBCD is een vierkant en $\angle A = 60°$.

Bereken exact AB.



OPLOSSING 2

(1) Stel BE = x,
Dan is BE = BC = CD = DE = x

(2) AE = $\frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{x}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}x\sqrt{3}$
AD = $2 \cdot \frac{1}{3}x\sqrt{3} = \frac{2}{3}x\sqrt{3}$

(3) Omtrek ABCD = AE + EB + BC + CD + AD = $\frac{1}{3}x\sqrt{3} + x + x + x + \frac{2}{3}x\sqrt{3} = 30$

$3x + x\sqrt{3} = 30$

$x(3 + \sqrt{3}) = 30$

$x = \frac{30}{3+\sqrt{3}}$

AB = AD + BE = $\frac{1}{3}x\sqrt{3} + x = \frac{1}{3} \cdot \frac{30}{3+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} + \frac{30}{3+\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} + \frac{30}{3+\sqrt{3}}$
AB = $\frac{30+10\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{10(3+\sqrt{3})}{3+\sqrt{3}} = 10$