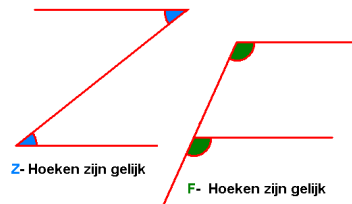


## PARAGRAAF 4.1 : GELIJKVORMIGHEID

## LES 1 : GELIJKVORMIGHEID

## DEFINITIES

- $\sin(\angle A) = \frac{\text{Overstaande}}{\text{Schuine}} = \frac{O}{S}$
- $\cos(\angle A) = \frac{\text{Aanliggende}}{\text{Schuine}} = \frac{A}{S}$
- $\tan(\angle A) = \frac{\text{Overstaande}}{\text{Aanliggende}} = \frac{O}{A}$
- Een ezelsbruggetje om dit te onthouden is : **CasSosToa of SosCasToa**
- F-hoeken en Z-hoeken



## THEORIE GELIJKVORMIGHEID

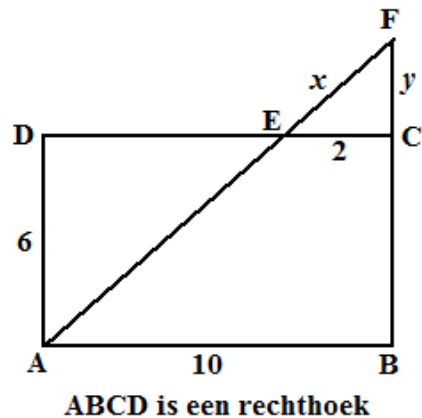
- Twee driehoeken zijn gelijkvormig als twee hoeken gelijk zijn.
- Notatie :  $\triangle ABC \propto \triangle PQR$
- D.w.z. dat  $\angle A = \angle P$  ;  $\angle B = \angle Q$  ;  $\angle C = \angle R$ . (Dus let op de volgorde !!!)
- Om zijden te berekenen maak je een gelijkvormigheidsschema :

AB = ...	AC = ...	BC = ...
PQ = ...	PR = ...	QR = ...

**VOORBEELD 1**

Gegeven is rechthoek ABCD met uitbreiding.

- Bereken  $\angle A$
- Toon aan dat  $\triangle ADE$  en  $\triangle EFC$  gelijkvormig zijn.
- Bereken  $y$  en  $x$

**OPLOSSING 1**

- $$\tan(\angle A) = \frac{DE}{AD} = \frac{8}{6}$$

$$\angle A = 53$$
- $$\angle A = \angle F \text{ (Z-hoek)}$$

$$\angle D = \angle C = 90$$

Dus  $\triangle ADE \propto \triangle FCE$
- Maak een gelijkvormigheidsschema.

AD = 6	AE =	DE = 8
FC = y	FE = x	CE = 2

(1) Je kunt nu berekenen dat  $y = \frac{6 \cdot 2}{8} = \frac{12}{8} = 1 \frac{1}{2}$

(2) Om  $x$  te berekenen moet je eerst Pythagoras doen :

$$AE^2 = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$$

(3) Vul in :

AD = 6	AE = 10	DE = 8
FC = y	FE = x	CE = 2

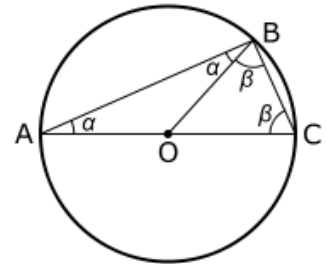
Je kunt nu berekenen dat  $x = \frac{10 \cdot 2}{8} = \frac{20}{8} = 2 \frac{1}{2}$

**LES 2 : THALES EN RAAKLIJNEN**

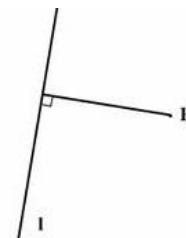
Er zijn een aantal belangrijke stellingen die betrekking hebben op cirkels :

**(1) STELLING VAN THALES**

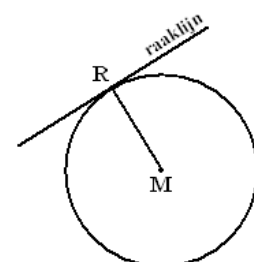
- Als C op de cirkel met middellijn AB ligt, dan is  $\angle C = 90$ .
- Als  $\angle C = 90$  dan is AB de middellijn AB.

**(2) STELLING AFSTAND PUNT – LIJN**

De afstand van een punt P tot lijn l is altijd de loodrechte (en dus kortste afstand).

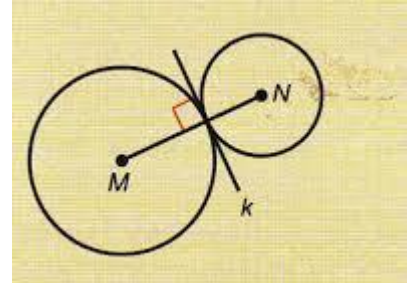
**(3) STELLING RAAKLIJN AAN CIRKEL**

Als de lijn l de cirkel raakt in punt R dan staat lijn MR (de straal) loodrecht op lijn l ( $l \perp MR$ )



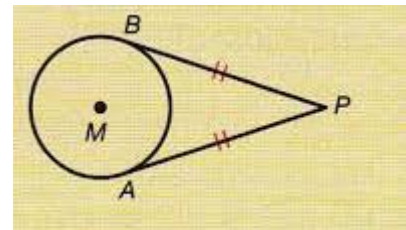
**(4) TWEE RAKENDE CIRKELS EN VERBONDEN MIDDELPUNTEN**

De raaklijn  $k$  in het gemeenschappelijke punt staat loodrecht op lijn  $MN$  (lijn door middelpunten)

**(5) RAAKLIJNEN AAN CIRKEL VANUIT PUITEN CIRKEL**

Teken de raaklijnen  $k$  en  $l$  vanuit  $P$  aan de cirkel.

Dan geldt  $PA = PB$ .

**VOORBEELD 1**

Maak opgave 16 uit boek.

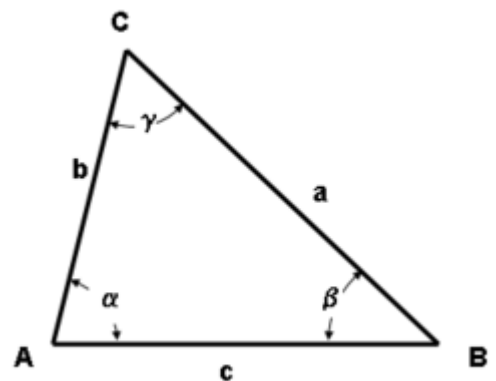
## PARAGRAAF 4.2 : DE SINUS- EN COSINUSREGEL

Er zijn twee belangrijke regels waarmee je in niet-rechthoekige driehoeken de zijden en hoeken van een driehoek kunt berekenen.

## REGEL 1 : DE SINUSREGEL

- $a = BC$   $b = AC$   $c = AB$  (de letter die er niet in zit)
- $\angle A = \alpha$   $\angle B = \beta$   $\angle C = \gamma$
- Dan geldt de sinusregel :

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$



## REGEL 2 : DE COSINUSREGEL

- $a = BC$   $b = AC$   $c = AB$  (de letter die er niet in zit)
- $\angle A = \alpha$   $\angle B = \beta$   $\angle C = \gamma$
- Dan geldt de cosinusregel :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$

- Let op : de hoek ( $\alpha$ ) moet de hoek zijn tegenover de zijde !!!!

**VOORBEELD 1**

Gegeven is  $\triangle ABC$  met  $b = 10$ ,  $\beta = 66^\circ$  en  $\gamma = 73^\circ$ .

Bereken  $a$  en  $c$  in één decimaal nauwkeurig.

**OPLOSSING 1**

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$(1) \alpha = 180 - 66 - 73 = 41^\circ$$

$$(2) \frac{a}{\sin 41} = \frac{10}{\sin 66} = \frac{c}{\sin 73}$$

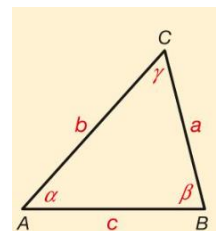
$$(3) a = \frac{10 \cdot \sin 41}{\sin 66} = 7,2$$

$$(4) c = \frac{10 \cdot \sin 73}{\sin 66} = 10,5$$

**VOORBEELD 2**

Gegeven is  $\triangle ABC$  met  $a = 6$ ,  $b = 8$  en  $c = 9$

Bereken  $\beta$  in graden nauwkeurig.

**OPLOSSING 1**

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$8^2 = 6^2 + 9^2 - 2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \cos \beta$$

$$64 = 117 - 108 \cdot \cos \beta$$

$$108 \cdot \cos \beta = 53$$

$$\cos \beta = \frac{53}{108}$$

$$\beta = 61^\circ \quad (\cos^{-1}(53:108))$$

**VOORBEELD 3**

*Maak opgave 26 uit boek.*

**VOORBEELD 4**

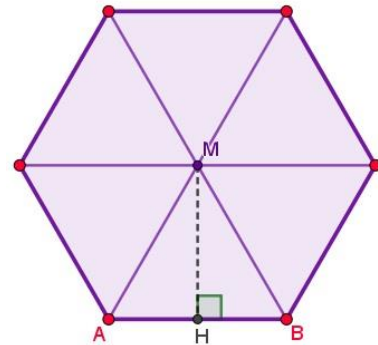
*Maak opgave 36 uit boek.*

## PARAGRAAF 4.3 : LENGTE EN OPPERVLAKTE BEREKENEN

## LES 1 : REGELMATIGE N-HOEK EN CIRKELSEGMENT / TAARTPUNT

## VOORBEELD 1

Bereken de oppervlakte van een regelmatige zeshoek met lengte zijde  $AB = 10$ .



## OPLOSSING 1

Een regelmatige zeshoek bestaat uit 6 driehoekjes

$$(1) \angle AMB = \frac{360}{6} = 60 \text{ dus } \angle AMH = \frac{1}{2} \cdot 60 = 30$$

$$(2) AB = 10 \text{ dus } AH = 5$$

$$(3) \tan(\angle A) = \frac{AH}{MH}$$

$$\tan(30) = \frac{5}{MH}$$

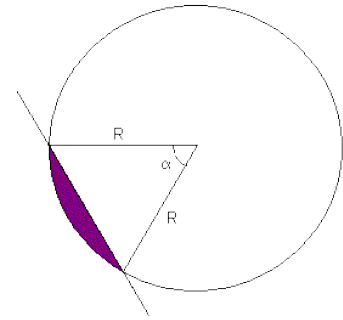
$$(4) MH = \frac{5}{\tan(30)} \approx 8,66..$$

$$(5) \text{Opp } \triangle ABH = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 8,66.. = 43,30 \dots$$

$$(6) \text{Opp zeshoek} = 6 \cdot \text{Opp } \triangle ABH = 6 \cdot 43,30.. = 259,81$$

**VOORBEELD 2**

Gegeven is de figuur hiernaast met  $R = 6$  en  $\alpha = 70$  graden. Bereken de oppervlakte van het paarse stuk. Rond af op twee decimalen.

**OPLOSSING 2**

Om de oppervlakte uit te rekenen moet je een aantal stappen doen :

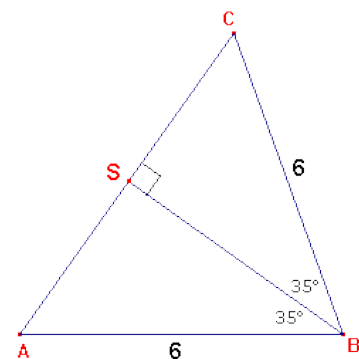
(1) Opp. Paars = Opp. Cirkelsegment – Opp. Driehoek  
Opp. Paars = Opp. Taartpunt – Opp. Driehoek

(2) Opp. Cirkel =  $\pi R^2 = \pi \cdot 6^2 = 36\pi$   
Opp taartpunt =  $\frac{70}{360} \times \text{Opp cirkel} = \frac{70}{360} \times 36\pi = 7\pi$

(3) Opp. Driehoek ABC =  $\frac{1}{2} \times BS \times AC$

- $\cos(35) = \frac{BS}{6} \rightarrow BS = 6 \cos(35)$  (= 4,91 ...)
- $\sin(35) = \frac{AS}{6} \rightarrow AS = 6 \sin(35)$  (= 3,44 ...)
- $AC = 2AS = 12 \sin(35)$  (= 6,88 ...)
- $\text{Opp } \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 6 \cos(35) \times 12 \sin(35) = 16,91446717$

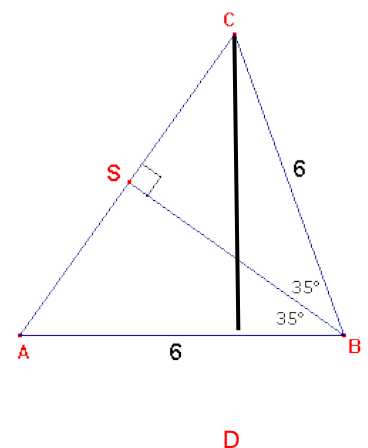
(4) Opp. Paars = Opp. Taartpunt – Opp. Driehoek  
Opp. Paars =  $7\pi - 16,91446717 = 5,08$

**OPMERKING**

Je kunt stap (3) ook sneller doen, door de hoogtelijn vanuit punt C te nemen. Dan is

$$\sin(70) = \frac{CD}{6} \rightarrow CD = 6 \sin(70) \quad (= 5,63 \dots)$$

$$\text{Opp } \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 6 \cos(70) \times 6 = 16,9144$$

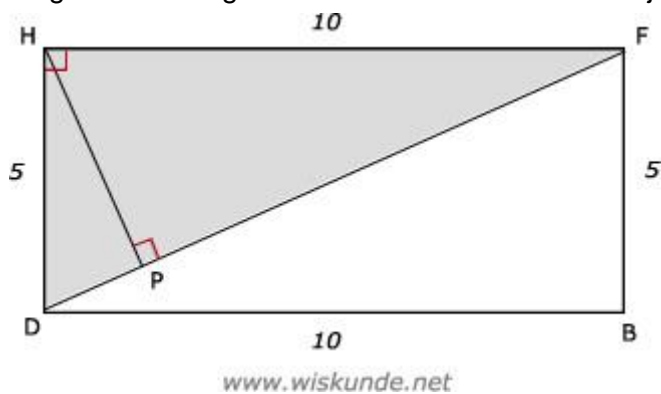




## LES 2 : DE ZIJDE – HOOGTEMETHODE

## VOORBEELD 1

Gegeven is de figuur hierbeneden. Bereken de zijde HP.



## OPLOSSING 1

De zijde-hoogtemethode maakt eigenlijk gebruik van het feit dat je de oppervlakte van een driehoek kunt bereken met verschillende bases.

$$(1) \text{ Opp } \triangle DFH = \frac{1}{2} \times HD \times HF = \frac{1}{2} \times FD \times HP$$

(2) Bereken de ontbrekende zijde :

$$\begin{aligned} DF^2 &= BD^2 + BF^2 \\ DF^2 &= 10^2 + 5^2 = 125 \\ DF &= \sqrt{125} \end{aligned}$$

(3) Vul in en bereken HP :

$$\begin{aligned} \text{Opp } \triangle DFH &= \frac{1}{2} \times 5 \times 10 = \frac{1}{2} \times \sqrt{125} \times HP \\ HP &= \frac{50}{\sqrt{125}} \end{aligned}$$

## OPMERKING

Omdat aan beide zijden de helft kan worden weggelaten, hoeft die in de berekening niet mee te nemen (maar maakt het wel duidelijker).

## PARAGRAAF 4.4 : VERGELIJKINGEN IN DE MEETKUNDE

## DEFINITIE BIJZONDERE DRIEHOEKEN

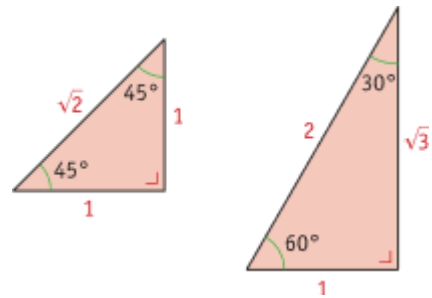
Er zijn twee bijzondere driehoeken die vaak terugkomen (afbeelding staat eronder):

## (1) De 45-45-90 driehoek

De verhouding van de zijden is  $1 : 1 : \sqrt{2}$  (laatste is schuine zijde)

## (2) De 30-60-90 driehoek

De verhouding van de zijden is  $1 : \sqrt{3} : 2$  (laatste is schuine zijde)



Je kunt dit vaak gebruiken om eenvoudig bepaalde zijden uit te rekenen.

## VOORBEELD 1

Gegeven is trapezium ABCD met loodlijnen BE en CF op AB. Gegeven is ook dat  $BE = 8$  en  $\angle A = 60^\circ$  en  $\angle D = 45^\circ$

## a. Bereken de lengte van AE en FD

De oppervlakte van EFCB is 5 keer de oppervlakte van AEB.

## b. Bereken de lengte van BC.



## OPLOSSING 1

## a. AEB is een 30-60-90 driehoek.

Dus  $AE : EB : AB = 1 : \sqrt{3} : 2 = AE : 8 : AB$

$$AE = \frac{8}{\sqrt{3}}$$

CFD is een 45-45-90 driehoek. Dus  $FD = CF = 8$ .

b.  $AB = 2AE = 2 \times \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{16}{\sqrt{3}}$ 

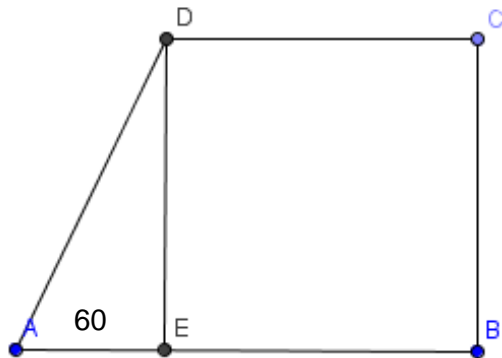
$$\text{Opp } \triangle ABE = \frac{1}{2} \times AE \times AB = \frac{1}{2} \times \frac{16}{\sqrt{3}} \times \frac{8}{\sqrt{3}} = 21\frac{1}{3}$$

$$\text{Opp } EFCB = 5 \times \triangle ABE = 5 \times 21\frac{1}{3} = 106\frac{2}{3}$$

$$EF = 106\frac{2}{3} : 8 = 13\frac{1}{3}$$

**VOORBEELD 2**

De omtrek van vierhoek ABCD is 30 met EBCD is een vierkant en  $\angle A = 60^\circ$ .  
Bereken exact AB.

**OPLOSSING 2**

(1) Stel  $BE = x$ ,

Dan is  $BE = BC = CD = DE = x$

$$(2) AE = \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{x}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}x\sqrt{3}$$

$$AD = 2 \cdot \frac{1}{3}x\sqrt{3} = \frac{2}{3}x\sqrt{3}$$

$$(3) \text{Omtrek } ABCD = AE + EB + BC + CD + AD = \frac{1}{3}x\sqrt{3} + x + x + x + \frac{2}{3}x\sqrt{3} = 30$$

$$3x + x\sqrt{3} = 30$$

$$x(3 + \sqrt{3}) = 30$$

$$x = \frac{30}{3 + \sqrt{3}}$$

$$AB = AD + BE = \frac{1}{3}x\sqrt{3} + x = \frac{1}{3} \cdot \frac{30}{3 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} + \frac{30}{3 + \sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} + \frac{30}{3 + \sqrt{3}}$$

$$AB = \frac{30 + 10\sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{10(3 + \sqrt{3})}{3 + \sqrt{3}} = 10$$