PARAGRAAF 3.1 : HOGEREGRAADSVERGELIJKINGEN

DEFINITIES BEREKEN …

- Bereken algebraïsch = { Oplossen ZONDER de GR. Je mag (soms) afronden }
- Bereken exact = { Oplossen ZONDER de GR. Je mag NOOIT afronden }
- Bereken = { Je mag de GR (Intersect / Zero) gebruiken }

OPLOSSEN MOEILIJKE VERGELIJKINGEN

Er zijn twee technieken die heel vaak terugkomen :

(1) PENCY (VERVANGEN DOOR P)

Vervang een deel door de letter p. Vaak wat tussen haakjes staat of een macht van x.

(2) OOHH (OUT OF HOOKIES HOOLEN = BUITEN HAAKJES HALEN)

Kijk welke term in ieder deel staat en breng dit buiten de haakjes.

VOORBEELD 1

Bereken exact :

a. $x^3 - 4x^2 - 12x = 0$

b. $x^6 - 5x^3 = -4$

c. $(x-5)^6 = 4$

d. $|\,x^6 - 5\,| = 4$

OPLOSSING 1

a. $x^3 - 4x^2 - 12x = 0$

$x(x^2 - 4x - 12) = 0$

$x = 0 \quad of \quad x^2 - 4x - 12 = 0$

$x = 0 \quad of \quad (x - 6)(x + 2) = 0$

$x = 0 \quad of \quad x = 6 \quad of \quad x = -2$

b. $x^6 - 5x^3 = -4$

$x^6 - 5x^3 + 4 = 0$ (Stel $x^3 = p$ dan is $p^2 = p \cdot p = x^3 \cdot x^3 = x^6$)

$p^2 - 5p + 4 = 0$

$(p - 4)(p - 1) = 0$

$p = 4 \quad of \quad p = 1$ (nu weer terug vervangen $p = x^3$)

$x^3 = 4 \quad of x^3 = 1$

$x = \sqrt[3]{4}\, of \quad x = \sqrt[3]{1} = 1$

c. $(x - 5)^6 = 4$ (Stel $p = x - 5$)

$p^6 = 4$

$p = \sqrt[6]{4} \quad v \quad p = -\sqrt[6]{4}$

$x - 5 = \sqrt[6]{4} \quad v \quad x - 5 = -\sqrt[6]{4}$

$x = 5 + \sqrt[6]{4} \quad v \quad x = 5 - \sqrt[6]{4}$

d. $|\, x^6 - 5\,| = 4$

$x^6 - 5 = 4 \quad v \quad x^6 - 5 = -4$

$x^6 - = 9 \quad v \quad x^6 = 1$

$x = \sqrt[6]{9} \;\; v \;\; x = -\sqrt[6]{9} \quad v \;\; x = \sqrt[6]{1} = 1 \;\; v \;\; x = -\sqrt[6]{1} = -1$

PARAGRAAF 3.2 : STELSELS VERGELIJKINGEN

LES 1 : STELSELS VERGELIJKINGEN

THEORIE STELSELS

- Stelsel vergelijkingen = { twee vergelijkingen (lijnen) die bij elkaar horen }
- De oplossing van dit stelsel is het snijpunt van de lijnen.
- Om een stelsel met n onbekenden op te lossen heb je n vergelijkingen nodig.

OPLOSSEN STELSELS

Je kunt een stelsel vergelijkingen op twee manieren oplossen :

(1) Substitutie = { Eén variabele vrijmaken en die bij de ander invullen }
(2) Eliminatie = { De x-en (of y-en) gelijkmaken en dan van elkaar afhalen }

VOORBEELD 1

Bereken het snijpunt van de lijnen $2x + y = 7$ en $4x - 3y = -1$.

OPLOSSING 1

Je kunt dit ook als stelsel van vergelijkingen als volgt weergeven :

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 4x - 3y = -1 \end{cases}$$

Je kunt dit op twee manieren oplossen :

a. Substitutie
b. Eliminatie

OPLOSSING (1) : SUBSTITUTIE

(1) Uit regel 1 volgt : $y = -2x + 7$.

(2) Vul dit in in 2 dan krijg je : $4x - 3(-2x + 7) = -1$

$$4x + 6x - 21 = -1$$

$$10x = 20$$

$$x = 2$$

(3) Dan is $y = -2 \cdot 2 + 7 = 3$

(4) Snijpunt = $(2,3)$

OPLOSSING (2) : ELIMINATIE

Je wil weer graag een letter elimineren. (eruit gooien)

(1) In regel 1 staat 2x en in regel 2 staat 4x. Als we de eerste vergelijking met 2 vermenigvuldigen dan krijg je :

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 4x - 3y = -1 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \cdot 2 \\ \cdot 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x + 2y = 14 \\ 4x - 3y = -1 \end{cases}$$

$$5y = 15 \rightarrow y = 3$$

(2) Dan is $2x + 3 = 7 \rightarrow x = 2$

(3) Snijpunt = $(2,3)$

LES 2 : MOEILIJKERE STELSELS

VOORBEELD 1

Gegeven zijn de lijnen $y = ax + b$ en $y = \frac{5}{3}bx + a$. De lijnen snijden elkaar in het punt $S = (3,7)$. Bereken a en b.

OPLOSSING 1

(1) Het punt (3,7) invullen in beide vergelijkingen geeft

$7 = a \cdot 3 + b \rightarrow 3a + b = 7$ (V1)

$7 = 5b + a \rightarrow a + 5b = 7$ (V2)

(2) Los het stelsel op

$$\begin{cases} 3a + b = 7 \\ a + 5b = 7 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \times 1 \\ \times 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} 3a + b = 7 \\ 3a + 15b = 21 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \times 1 \\ \times 3 \end{vmatrix}$$

$$-14b = -14 \rightarrow b = 1 \rightarrow a = \frac{7-1}{3} = 2$$

VOORBEELD 2

Los algebraïsch op

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 169 \\ 3a - b = 3 \end{cases}$$

OPLOSSING 2

Stelsels met kwadraten kun alleen maar oplossen met substitutie.

(1) $3a - b = 3 \rightarrow b = 3a - 3$

(2) Invullen in (V2) geeft

$a^2 + (3a - 3)^2 = 169$

$a^2 + 9a^2 - 18a + 9 = 169$

$10a^2 - 18a - 160 = 0$

$D = 324 - 4 \cdot 10 \cdot -160 = 6724 \rightarrow \sqrt{D} = 82$

$a = \frac{18 + 82}{20} = 5 \ \ v \ \ a = \frac{18 - 82}{20} = -3{,}2$

(3) Er zijn dus 2 oplossingen

$a = 5 \ \rightarrow b = 12 \quad v \ \ a = -3{,}2 \rightarrow b = -12{,}6$

PARAGRAAF 3.3 : ALLERLEI VERGELIJKINGEN OPLOSSEN

LES 1 : OPLOSSEN VAN MOEILIJKE VERGELIJKINGEN

OPLOSSEN MOEILIJKE VERGELIJKINGEN

Er zijn drie technieken die heel vaak terugkomen :

(1) PENCY (VERVANGEN DOOR P)

Vervang een deel door de letter p. Vaak wat tussen haakjes staat of een macht van x.

(2) OOHH (OUT OF HOOKIES HOOLEN = BUITEN HAAKJES HALEN)

Kijk welke term in ieder deel staat en breng dit buiten de haakjes.

(3) KWADRATEREN OF WORTELTREKKEN

VOORBEELD 1

Los exact op

a. $(3x-1)^2 = 4x^2$

b. $3x - 2\sqrt{x} = 1$

c. $x^3 - 12 = x\sqrt{x}$

d. $x(x-1)^2 = 2(x-1)$

OPLOSSING 1

a. Duidelijk geval van worteltrekken

$(3x-1)^2 = 4x^2$ $\{ A^2 = B^2 \rightarrow A = B \;\; v \;\; A = -B \}$

$3x - 1 = 2x \;\; v \;\; 3x - 1 = -2x$

$x = 1 \qquad v \;\; 5x = 1$

$x = 1 \qquad v \;\; x = \frac{1}{5}$

b. $3x - 2\sqrt{x} = 1$ { Wortel apart en dan kwadrateren }

$2\sqrt{x} = 3x - 1$ { Kwadrateren }

$4x = (3x-1)^2$

$4x = 9x^2 - 6x + 1$

$9x^2 - 10x + 1 = 0$

$x^2 - \frac{10}{9}x + \frac{1}{9} = 0$

$(x-1)(x-\frac{1}{9}) = 0$ { of abc-formule }

$x = 1 \;\; v \;\; x = \frac{1}{9}$ { bij kwadrateren altijd oplossingen controleren }

(VN) { want $2\sqrt{\frac{1}{9}} \neq 3 \cdot \frac{1}{3} - 1$ }

Dus de enige oplossing is $x = 1$

c. Je kunt hier pency gebruiken. Neem $p = x\sqrt{x}$ en $p^2 = x^3$.

$x^3 - 12 = x\sqrt{x}$

$x^3 - x\sqrt{x} - 12 = 0$

$p^2 - p - 12 = 0$

$(p-4)(p+3) = 0$

$p = 4 \;\; v \;\; p = -3$

$x\sqrt{x} = 4 \;\; v \;\; x\sqrt{x} = -3 \; (VN)$ { de eerste kwadrateren we }

$x^3 = 16$

$x = \sqrt[3]{16}$

d. $x(x-1)^2 = 2(x-1)$

$x(x-1)^2 - 2(x-1) = 0$ { zelfde term “buiten haakjes halen” }

$(x-1)\,[\,x(x-1) - 2\,] = 0$

$x - 1 = 0 \quad v \quad x(x-1) - 2 = 0$

$x = 1 \qquad v \quad x^2 - x - 2 = 0$

$x = 1 \qquad v \quad (x+1)(x-2) = 0$

$x = 1 \qquad v \quad x + 1 = 0 \quad v \quad x - 2 = 0$

$x = 1 \qquad v \quad x = -1 \quad v \quad x = 2$

OPMERKING

Soms de OOHH methode moeilijk te zien. Je mag dan ook delen door de gemeenschappelijke factor, maar die kan ook een oplossing geven, dus die moet je ook gelijk stellen aan NUL !!!

Alternatieve oplossing voor ***d.***

$x(x-1)^2 = 2(x-1)$ { Nu delen door x-1. Let op deze term kan ook NUL zijn}
$x(x-1) = 2 \quad v \quad x-1=0$

$x^2 - x - 2 = 0 \quad v \quad x = 1$ etc.

LES 2 : OPLOSSEN VAN GEBROKEN VERGELIJKINGEN (BREUK)

OPLOSSEN BREUKENVERGELIJKING

De oplossing van een breukenvergelijking is :

(1) Zorg dat er links en rechts een breuk staat.

(2) Doe kruiselings vermenigvuldigen en los verder op (als het een uitzondering is, gebruik dan onderstaande regels).

(3) Controleer of de noemer voor de oplossing niet nul is.

ER ZIJN TWEE UITZONDERING VOOR STAP (2)

1. Als de vorm $\frac{A}{B} = \frac{A}{C}$ is, dan is de oplossing $A = 0 \ \vee B = C$

2. Als de vorm $\frac{B}{A} = \frac{C}{A}$ is, dan is de oplossing $B = C$

VOORBEELD 1

a. $\frac{x^2-2}{x+3} = 2$

b. $\frac{x^2-2}{x+3} = \frac{7}{x+3}$

c. $\frac{x^2-1}{x+3} = \frac{x^2-1}{2x-7}$

OPLOSSING 1

a. $\frac{x^2-2}{x+3} = \frac{2}{1}$

$2(x+3) = 1(x^2-2)$

$2x + 6 = x^2 - 2$

$x^2 - 2x - 8 = 0$

$(x-4)(x+2) = 0$

$x = 4 \;\; v \;\; x = -2$

b. $\frac{x^2-2}{x+3} = \frac{7}{x+3}$ { Uitzondering 2. $\frac{B}{A} = \frac{C}{A}$ }

$x^2 - 2 = 7$

$x^2 = 9$

$x = 3 \;\; v \;\; x = -3 \; (VN)$ { Bij x=-3 is de noemer nul, dus is er maar één oplossing }

Dus $x = 3$

c. $\frac{x^2-1}{x+3} = \frac{x^2-1}{2x-7}$ { Uitzondering 1. $\frac{A}{B} = \frac{A}{C}$ }

$x^2 - 1 = 0 \quad v \quad x + 3 = 2x - 7$

$x^2 = 1 \quad v \quad -x = -10$

$x = 1 \quad v \quad x = -1 \quad v \quad x = 10$ { De noemer is niet nul voor deze oplossingen }

OPMERKING

Bij wortelvergelijkingen en bij breuken moet je de oplossing ALTIJD controleren !!!

PARAGRAAF 3.4 : HERLEIDINGEN (VAN BREUKEN)

LES 1 : HERLEIDEN VAN BREUKEN

VOORBEELD 1

Herleid de volgende breuken

a. $\frac{1}{x} + \frac{5}{x+2} =$

b. $\frac{x}{x-1} \times \frac{x^2-1}{3} =$

c. $\frac{4x}{\frac{x}{x-1}} =$

Schrijf uit

d. $(x+1)^3 =$

OPLOSSING 1

a. $\frac{1}{x} + \frac{5}{x+2} = \frac{1(x+2)}{x(x+2)} + \frac{5x}{x(x+2)} =$

$\frac{x+2}{x(x+2)} + \frac{5x}{x(x+2)} = \frac{x+2+5x}{x(x+2)} = \frac{6x+2}{x^2+2x}$

b. $\frac{x}{x-1} \times \frac{x^2-1}{3} = \frac{x(x^2-1)}{3(x-1)} = \frac{x(x+1)(x-1)}{3(x-1)}$

$= \frac{x(x+1)}{3} = \frac{x^2+x}{3} = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x$

c. $\frac{4x}{\frac{x}{x-1}} = \frac{4x}{\frac{x}{x-1}} \times \frac{x-1}{x-1} = \frac{4x^2-x}{x} = \frac{4x^2}{x} - \frac{x}{x} = 4x - 1$

d. $(x+1)^3 = (x+1)(x+1)^2 = (x+1)(x^2+2x+1)$

$= x^3 + 2x^2 + x + x^2 + 2x + 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

VOORBEELD 2

a. Gegeven is de formule $y = x(3 + \frac{\frac{10}{x}}{x+1})$

Herleid deze tot de vorm $y = ax + \frac{b}{x^2+x}$ met a en b getallen.

b. Gegeven is de formule $y = \frac{6x}{3+\frac{x}{x-1}}$

Herleid deze tot de vorm $y = \frac{ax^2+bx}{cx-d}$ met a, b, c en d getallen.

OPLOSSING 2

a. $y = x\left(3 + \frac{\frac{10}{x^2}}{x+1}\right) = 3x + \frac{x}{1} \cdot \frac{\frac{10}{x^2}}{x+1}$

$y = 3x + \frac{x \cdot \frac{10}{x^2}}{x+1}$

$y = 3x + \frac{\frac{10x}{x^2}}{x+1} =$

$y = 3x + \frac{\frac{10}{x}}{\frac{x+1}{1}} =$

$y = 3x + \frac{10}{x} \cdot \frac{1}{x+1}$

$y = 3x + \frac{10}{x^2+x}$

b. $y = \frac{6x}{3+\frac{x}{x-1}} = \frac{6x}{3+\frac{x}{x-1}} \times \frac{x-1}{x-1}$

$y = \frac{x^2+x}{3(x-1)+x}$

$y = \frac{x^2+x}{3x-3+x}$

$y = \frac{x^2+x}{4x-3}$