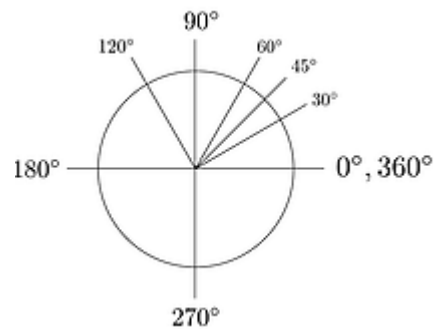


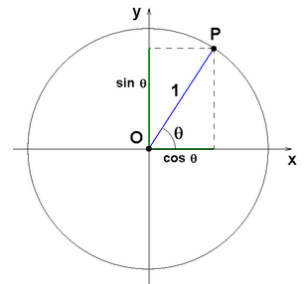
PARAGRAAF 14.0 : EENHEIDSCIRKEL

DE EENHEIDSCIRKEL MET GRADEN



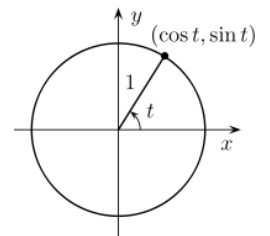
DEFINITIES

- Eenheids­cirkel = { Cirkel met middelpunt O en straal 1 }
- $\sin(\theta) = \frac{y\text{-coördinaat}}{1} \rightarrow y = \sin(\theta)$

**Voorbeeld 1 : Graden en coördinaten**

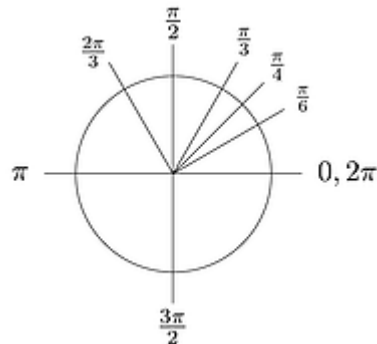
Kijk naar de eenheids­cirkel. Bereken de y-coördinaat als

- $t = 90$
- $t = 22$

**Oplossing 1**

- Dit mag gewoon op de GR : $y = \sin(90) = 1$
- Dit mag gewoon op de GR : $y = \sin(22) = 0,37$

DE EENHEIDSCIRKEL MET RADIALEN



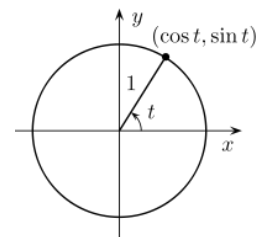
DEFINITIES RADIALEN

- Radiaal = { Afstand (in cm) die iemand heeft afgelegd als hij over de rand van de cirkel loopt }
- De omtrek van de cirkel = $2\pi \cdot r = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$
- 2π rad = 360 graden → π rad = 180 graden

VOORBEELD 1 : RADIALEN

Kijk naar de eenheidscirkel. Bereken de y-coördinaat als

- $t = 1\frac{1}{2}\pi$
- $t = 1\frac{1}{3}\pi$



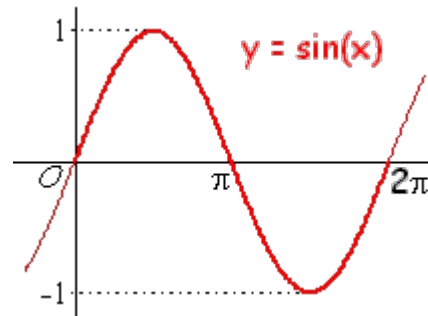
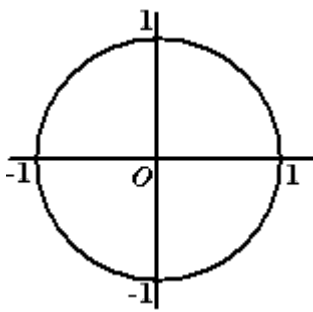
OPLOSSING 1

- Dit mag gewoon op de GR : $y = \sin\left(1\frac{1}{2}\pi\right) = -1$
- Dit mag gewoon op de GR : $y = \sin\left(1\frac{1}{3}\pi\right) = -0,87$

DE GRAFIEK VAN $y = \sin(x)$

De grafiek van $y = \sin(x)$ kun je uit de eenheidscirkel halen :

(1) $y = \sin(x)$ (de y-coördinaat in de eenheidscirkel)

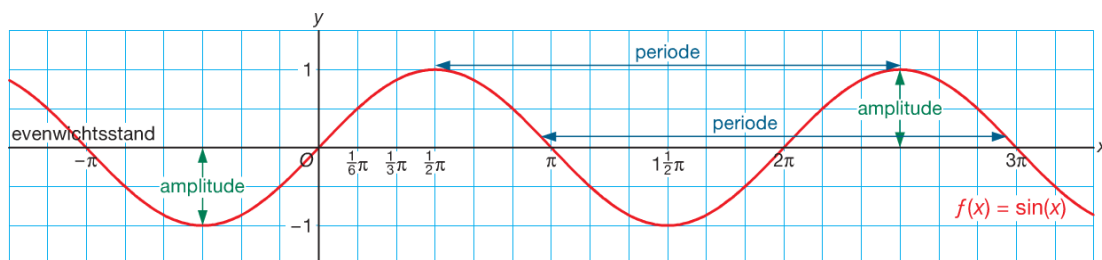


PARAGRAAF 14.1 : SINUSÖIDEN

LES 1 : TEKENEN VAN EEN GONIOFORMULE

DEFINITIE

Gegeven is gonioformule $y = a + b \sin c(x - d)$



Hierin is:

(1) a = evenwichtsstand

(2) b = amplitude

(3) $c = \frac{2\pi}{\text{periode}}$ of $\text{periode} = \frac{2\pi}{c}$

(4) d = verschuiving met

$x + d$ = verschuiving d naar links

$x - d$ = verschuiving d naar rechts

STAPPENPLAN TEKENEN GONIO-FORMULE $y = a + b \sin c(x - d)$

(1) Teken eerst de formule $y = a + b \sin cx$ (dus zonder verschuiving d)

(2) Verschuif de eerste grafiek d naar links / rechts

VOORBEELD 1

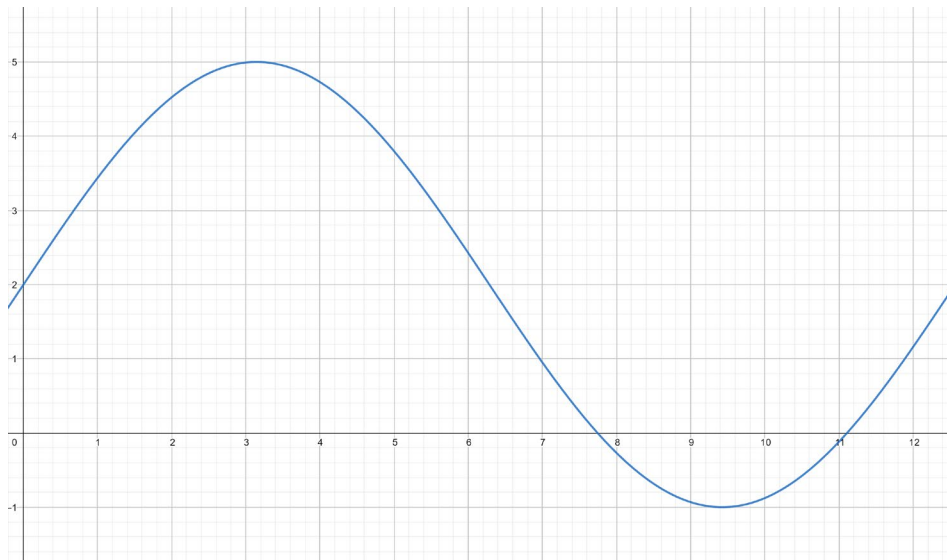
Teken op domein $[0, 2\pi]$ de formule $f(x) = 2 + 3\sin\frac{1}{2}(x - 1)$

OPLOSSING 1

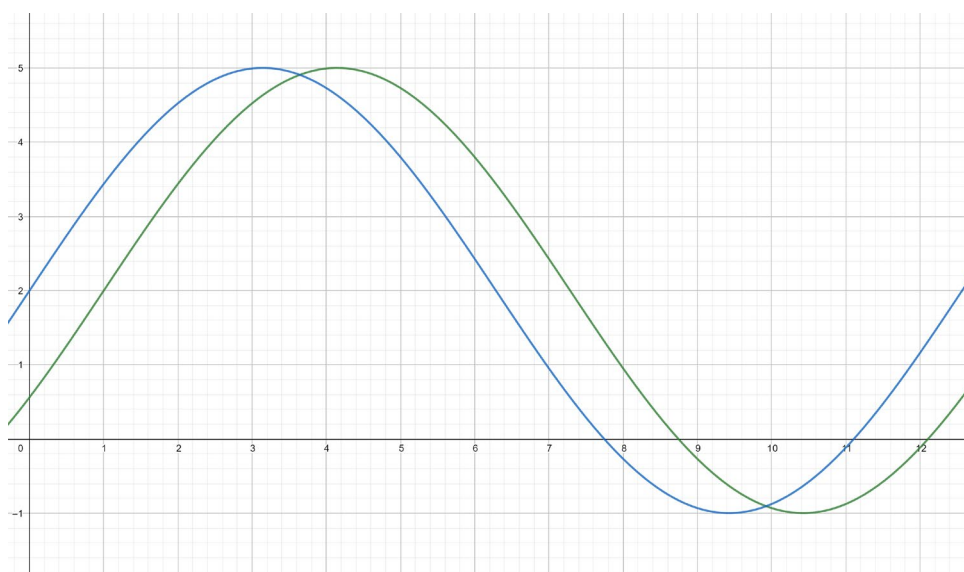
a. (1) $a = \text{evenwichtsstand} = -2$

$$b = \text{amplitude} = 3$$

$$\text{periode} = \frac{2\pi}{0,5} = 4\pi (\approx 12,57)$$

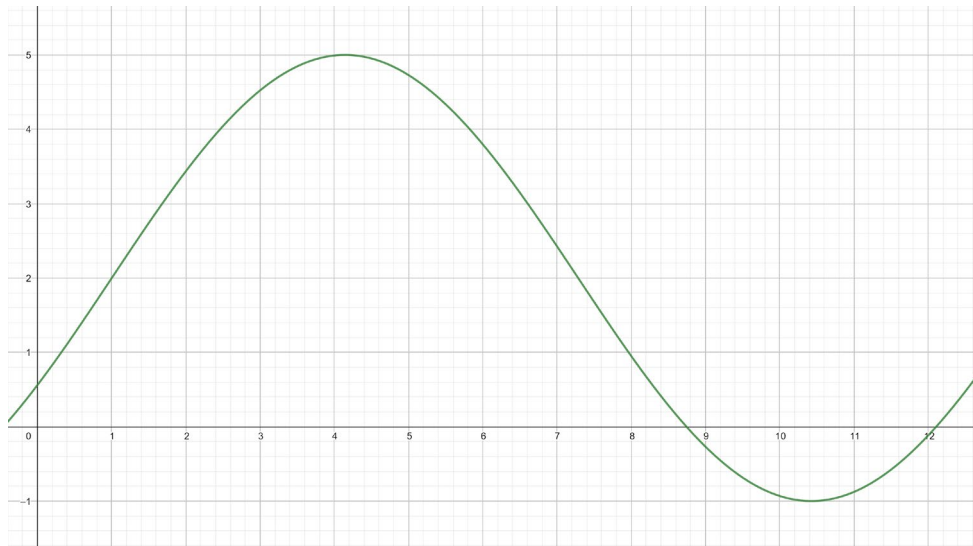


(2) $-1 = \text{verschuiving 1 naar links}$



OPMERKING

Je kunt ook direct de grafiek tekenen. Je moet dan als start van de grafiek het punt (*verschuiving, evenwichtsstand*) = (1,2) nemen voor de sinusgrafiek.

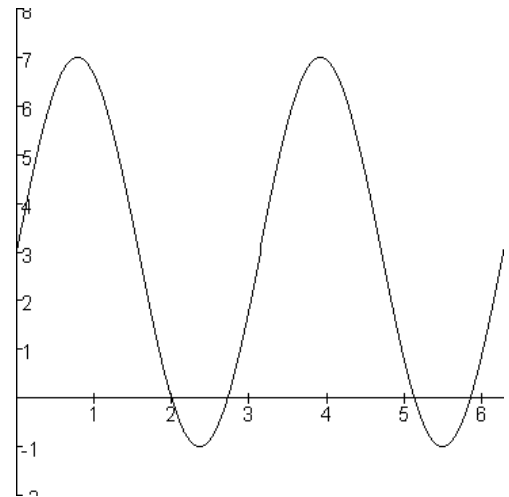


PARAGRAAF 14.2 : FORMULES VAN SINUSOÏDEN OPSTELLEN

LES 1 BEPALEN VAN EEN GONIOFORMULE

VOORBEELD 1

- Bepaal de formule van de grafiek.
- Bereken zonder de GR het maximum en het minimum.
- Bereken de helling in $x = 1$.
- Bereken de maximale helling.
- Bereken de minimale helling.



OPLOSSING 1

- Begint in de evenwichtsstand dus vandaar een sinusfunctie, want dan heb je geen verschuiving nodig.

$$(1) a = \text{evenwichtsstand} = \frac{7 + (-1)}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$(2) b = \text{amplitude} = 7 - 3 = 4$$

$$(3) \text{periode} = 4 - 1 = 3 \text{ (Van top tot top) dus } c = \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$$

- Bij de sinusgrafiek start in de evenwichtsstand en dat doet deze grafiek ook dus $d=0$.

$$\text{Dus } y = 3 + 4\sin\left(\frac{2}{3}\pi x\right)$$

- Maximum = evenwichtsstand + amplitude = $a + b = 3 + 4 = 7$
Minimum = evenwichtsstand – amplitude = $a - b = 3 - 4 = -1$.

c. $Y_1 = 3 + 4\sin\left(\frac{2}{3}\pi x\right)$

calc > dy/dx > x=1

helling = -4,19

d. De helling is maximaal als de grafiek door de evenwichtsstand omhoog gaat !!

Dat is bij $x = 0$. Dus

$$Y_1 = 3 + 4\sin\left(\frac{2}{3}\pi x\right)$$

calc > dy/dx > x=0

helling = 8,38

e. De helling is minimaal als de grafiek door de evenwichtsstand omlaag gaat !!

(1) Bereken het snijpunt van de formule met de evenwichtsstand ($y=3$) waar de grafiek OMLAAG gaat ;

$$Y_1 = 3 + 4\sin\left(\frac{2}{3}\pi x\right) \text{ en } Y_2 = 3$$

calc > intersect

$x=1,5$

(2) Bereken de helling in dit punt (In dit geval $x=1,5707963$)

$$Y_1 = 3 + 4\sin\left(\frac{2}{3}\pi x\right)$$

calc > dy/dx > $x=1,5$

helling = -8,38

PARAGRAAF 14.3 : RIJEN BIJ FIGUREN

DEFINITIE

Er zijn twee soorten rijen die vaak terugkomen

1. Rekenkundige rij = { iedere keer een getal erbij tellen }
2. Meetkundige rij = { iedere keer met een getal vermenigvuldigen }

REKENKUNDIGE RIJ

- (1) De recursievergelijking : $u(n) = u(n-1) + v$, waarbij v een getal is.
(2) De directe formule : $u(n) = u_0 + n \cdot v$.

MEETKUNDIGE RIJ

- (1) De recursievergelijking : $u(n) = r \cdot u(n-1)$, waarbij r een getal is.
(2) De directe formule : $u(n) = u_0 \cdot r^n$.

SOMRIJ

$$S_n = \{ \text{Som van de eerste } (n + 1) \text{ termen van de rij } u \} = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

VOORBEELD 1

Gegeven is de recursievergelijking $u(n) = u(n-1) + 4$ en $u(0) = 9$

- a. Bereken $\sum_{i=0}^3 u_i$
- b. Bepaal de som van de eerste 12 termen.

OPLOSSING 1

a. $\sum_{i=0}^3 u_i = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 9 + 13 + 17 + 21 = 60$

b.

(1) De eerste 12 getallen is $u(0)$ t/m $u(11)$!!

Dus we moeten S_{11} berekenen.

(2) De GR gebruiken. Je hebt twee recursievergelijkingen nodig :

$$n_{\text{Min}} = 0$$

$$u(n) = u(n-1) + 4$$

$$u(n_{\text{Min}}) = 9$$

$$v(n) = v(n-1) + u(n-1) + 4 \quad \{ v(n-1) + \text{de recursievgl van } u(n) \}$$

$$v(n_{\text{Min}}) = 9 \quad \{ v(0) = u(0) = 9 \}$$

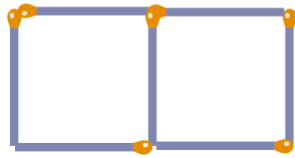
Table : $v(11) = 372$

VOORBEELD 2

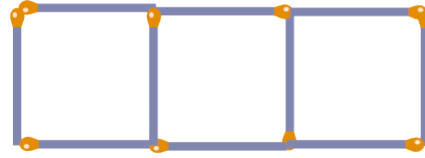
Gegeven zijn de volgende 3 figuren van een rij.



1



2



3

We kijken naar het totaal aantal lucifers van deze figuren (T).

Er geldt dus $T_1 = 4$; $T_2 = 7$; $T_3 = 10$.

Het totaal aantal lucifers wordt berekend door het aantal lucifers in de lengte (L) en het aantal lucifers dat omhoog ligt (H).

Er geldt bijvoorbeeld dat $L_2 = 4$ en $H_2 = 3$.

- Stel een directe formule op van L_n en H_n .
- Stel een directe formule en een recursievergelijking op van T_n .

Je kunt m.b.v. de formules van L_n en H_n ook een nieuwe formule maken. We definiëren $O_n = L_n \times H_n$.

- Stel een directe formule op van O_n .
- Stel een recursievergelijking op van O_n .

OPLOSSING 2

$$\begin{aligned} \text{a. } H_1 = 2 \quad H_2 = 3 \quad H_3 = 4 &> H_n = n + 1 \\ L_1 = 2 \quad L_2 = 4 \quad L_3 = 6 &> L_n = 2n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } T_n = H_n + L_n &= 2n + n + 1 = 3n + 2 \\ T_{n-1} &= 3(n-1) + 2 = 3n - 3 + 2 = 3n - 1 \\ T_n - T_{n-1} &= 3n + 2 - (3n - 1) = 3n + 2 - 3n + 1 = 3 \end{aligned}$$

Dus

$$T_n = T_{n-1} + 3$$

$$T_1 = L_1 + H_1 = 2 + 2 = 4$$

$$\text{c. } O_n = L_n \times H_n = 2n \times (n + 1) = 2n^2 + n$$

$$\begin{aligned} \text{d. } O_{n-1} &= 2(n-1)^2 + n - 1 = 2(n^2 - 2n + 1) + n - 1 \\ O_{n-1} &= 2n^2 - 4n + 2 + n - 1 = 2n^2 - 3n + 1 \end{aligned}$$

$$O_n - O_{n-1} = 2n^2 + n - (2n^2 - 3n + 1) = 2n^2 + n - 2n^2 + 3n - 1$$

$$O_n - O_{n-1} = 4n - 1$$

Dus

$$O_n = O_{n-1} + 4n - 1$$

$$O_1 = L_1 \times H_1 = 2 \times 2 = 4$$

PARAGRAAF 14.4 : VARIABELEN VRIJMAKEN

LES 1 GEBROKEN FORMULES OMWERKEN

Formules omwerken → kruiselings vermenigvuldigen of $2 = \frac{6}{3}$

VOORBEELD 1

- Maak x vrij bij de formule $y = 3x^{-3,2}$.
- Maak x vrij bij de formule $y = 5(2x + 1)^3$
- Maak x vrij bij de formule $y = \frac{1}{2}\sqrt[4]{x-1}$.

OPLOSSING 1

Draai de formule eerst om :

- $$3x^{-3,2} = y$$

$$x^{-3,2} = \frac{y}{3}$$

$$x = \left(\frac{y}{3}\right)^{-\frac{1}{3,2}} = y^{-0,3125}$$

- $$5(2x + 1)^3 = y$$

$$(2x + 1)^3 = \frac{y}{5}$$

$$2x + 1 = \left(\frac{y}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$2x + 1 = (0,2)^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{1}{3}}$$

$$2x + 1 = 0,585 \cdot \sqrt[3]{y}$$

$$2x = 0,585 \cdot \sqrt[3]{y} - 1$$

$$2x = 0,292 \cdot \sqrt[3]{y} - 0,5$$

- $$\frac{1}{2}\sqrt[4]{x-1} = y$$

$$\sqrt[4]{x-1} = 2y$$

$$x-1 = (2y)^4$$

$$x-1 = 2^4 \cdot (y)^4$$

$$x-1 = 16 \cdot y^4$$

$$x = 16 \cdot y^4 + 1$$

VOORBEELD 2

a. Gegeven is $y = \frac{2}{5x-1}$.

Druk x uit in y.

b. Gegeven is $A = 8 - \frac{8}{T+2}$.

Schrijf T als functie van A.

c. Gegeven is $A = \frac{p+3}{p-1}$.

Schrijf p als functie van A.

d. Gegeven is $Z = \frac{10T+20}{3} \cdot 15 + 7$.

Schrijf deze formule in de vorm $Z = aT + b$

OPLOSSING 2

a. $\frac{y}{1} = \frac{2}{5x-1}$ (kruiselings)

$$y(5x - 1) = 2 \cdot 1$$

$$5x - 1 = \frac{2}{y}$$

$$5x = \frac{2}{y} + 1$$

$$x = \frac{2}{5y} + \frac{1}{5}$$

OF

$$y = \frac{2}{5x-1} \quad (\text{makkelijk sommetje bijv. } 2 = \frac{6}{3})$$

$$5x - 1 = \frac{2}{y}$$

$$5x = \frac{2}{y} + 1$$

$$x = \frac{2}{5y} + \frac{1}{5}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } A - 8 &= -\frac{8}{T+2} \\ -A + 8 &= \frac{8}{T+2} & \{ y = \frac{6}{x} \rightarrow x = \frac{6}{y} \\ T + 2 &= \frac{8}{-A+8} \\ T &= \frac{8}{-A+8} - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } \frac{A}{1} &= \frac{p+3}{p-1} \\ A(p-1) &= 1 \cdot (p+3) \\ Ap - A &= p + 3 \\ Ap - p &= A + 3 \\ p(A-1) &= A + 3 \\ p &= \frac{A+3}{A-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d. } Z &= \frac{10T+20}{3} \cdot \frac{15}{1} + 7 = \frac{150T+300}{3} + 7 \\ Z &= \frac{150T}{3} + \frac{300}{3} + 7 = 50T + 100 + 7 \\ Z &= 50T + 107 \end{aligned}$$

LES 2 : COMBINEREN VAN FORMULES MET MEERDERE LETTERS**VOORBEELD 1**

Gegeven zijn $y = 10p + 2$ en $p = -5x + 4$.

- a. Neem $x = 2$ en bereken y .
- b. Druk y uit in x .

Gegeven is ook de formule $Q = y \cdot p$.

- c. Schrijf Q als functie van p .
- d. Druk Q uit in x .

OPLOSSING 1

a. $p = -5 \cdot 2 + 4 = -6$
 $y = 10 \cdot -6 + 2 = -58$

b. $y = 10p + 2 =$
 $y = 10 \cdot (-5x + 4) + 2 =$
 $y = -50x + 40 + 2$
 $y = -50x + 42$

c. $Q = y \cdot p = (10p + 2) \cdot p$
 $Q = 10p^2 + 2p$

d. $Q = y \cdot p = (-50x + 42)(-5x + 4)$
 $Q = 250x^2 - 210x - 200x + 168 = 250x^2 - 410x + 168$

LES 3 : VAN MACHT NAAR LOG EN OMGEKEERD**REKENREGELS LOGARITMEN**

De belangrijkste 4 regels zijn :

$$(1) \quad {}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a \cdot b)$$

$$(2) \quad {}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$(3) \quad {}^g\log(a^k) = k \cdot {}^g\log(a)$$

$$(4) \quad {}^g\log(g)^t = t$$

VOORBEELD 1

Schrijf de volgende formules als of als

a. Schrijf de formule $y = 5 \cdot 2^{3t+8}$ als $\log(y) = at + b$

b. Schrijf de formule als $t = d + c \ln(y)$.

Gegeven is ook de formule $y = 10 \cdot x^{2,3}$

c. Schrijf deze formule als $\log(y) = p + q \cdot \log(x)$

OPLOSSING 1

- a.** $y = 5 \cdot 2^{3t} \cdot 2^8$
 $y = 5 \cdot (2^3)^t \cdot 256$
 $y = 1280 \cdot 8^t$
 $\log(y) = \log(1280 \cdot 8^t)$
 $\log(y) = \log(1280) + \log(8^t)$
 $\log(y) = \log(1280) + t \cdot \log(8)$
 $\log(y) = 3,11 + t \cdot 0,90$
 $\log(y) = 0,90t + 3,11$
- of $\log(y) = \log(5 \cdot 2^{3t+8})$
 $\log(y) = \log(5) + \log(2^{3t+8})$
 $\log(y) = \log(5) + (3t + 8) \times \log(2)$
 $\log(y) = 0,69897 + (3t + 8) \times 0,301..$
 $\log(y) = 0,70 + 0,90t + 2,41$
 $\log(y) = 0,90t + 3,11$
- b.** $\ln(y) = \ln(5 \cdot 2^{3t+8})$
 $\ln(y) = \ln(5) + \ln(2^{3t+8})$
 $\ln(y) = \ln(5) + (3t + 8) \times \ln(2)$
 $\ln(y) = 1,609.. + (3t + 8) \times 0,693..$
 $\ln(y) = 1,61 + 2,08t + 5,55$
 $\ln(y) - 7,16 = 2,08t$
 $0,48\ln(y) - 3,44 = t \quad \rightarrow t = 0,48\ln(y) - 3,44$
- c.** $y = 10 \cdot x^{2,3}$
 $\log(y) = \log(10 \cdot x^{2,3})$
 $\log(y) = \log(10) + \log(x^{2,3})$
 $\log(y) = \log(10) + 2,3 \cdot \log(x)$
 $\log(y) = 1 + 2,3 \cdot \log(x)$

PARAGRAAF 14.5 : OMVORMEN EXPONENTEN EN LOGARITMEN

VOORBEELD 1

- a. Schrijf de formule $y = 9 \cdot 2^t$ om in de vorm $y = b \cdot 10^{ct}$
- b. Schrijf de formule $y = 0,25 \cdot \ln(3t)$ om in de vorm van een logaritme met grondtal 10

OPLOSSING 1

- a. $9 \cdot 2^t = 9 \cdot (10^c)^t$
 $2 = 10^c$
 $c = {}^{10}\log(2) = 0,301$ (en $b = 9$ uiteraard)
- b. We gaan gebruik maken van de regel ${}^g\log(a) = \frac{\log(a)}{\log(g)}$ $\{ {}^8\log(20) = \frac{\log(20)}{\log(8)} \}$
- $$y = 0,25 \cdot \ln(3t) = 0,25 \cdot \frac{\log(3t)}{\log(e)} = \frac{0,25 \cdot \log(3t)}{0,434..} = 0,576 \cdot \log(3t)$$

VOORBEELD 2

- a. Schrijf de formule $t = 4 \cdot \log(y) - 10$ om in de vorm $y = b \cdot g^t$
- b. Schrijf de formule $t = 4 \cdot \ln(y) - 10$ om in de vorm $y = b \cdot g^t$
- c. Schrijf de formule $\log(y) = 2 + 5 \cdot \log(x)$ om in de vorm $y = a \cdot x^n$

OPLOSSING 2

Maak gebruik van de regel : ${}^g\log(g)^t = t$

a. $t = 4 \cdot \log(y) - 10$

$$4\log(y) = t + 10$$

$$\log(y) = 0,25t + 2,5$$

$$\log(y) = \log(10^{0,25t + 2,5})$$

$$y = 10^{0,25t + 2,5}$$

$$y = 10^{0,25t} \cdot 10^{2,5}$$

$$y = 316,23 \cdot (10^{0,25})^t$$

$$y = 316,23 \cdot 1,78^t$$

b. $t = 4 \cdot \ln(y) - 10$

$$4\ln(y) = t + 10$$

$$\ln(y) = 0,25t + 2,5$$

$$\ln(y) = \ln(e^{0,25t + 2,5})$$

$$y = e^{0,25t + 2,5}$$

$$y = e^{0,25t} \cdot e^{2,5}$$

$$y = 12,18 \cdot (e^{0,25})^t$$

$$y = 12,18 \cdot 1,28^t$$

c. $\log(y) = 2 + 5 \cdot \log(x)$

$$\log(y) = \log(10^2) + \log(x^5)$$

$$\log(y) = \log(10^2 \cdot x^5)$$

$$y = 10^2 \cdot x^5$$

$$y = 100 x^5$$