PARAGRAAF 12.1 : EXPONENTIËLE GROEI

LES 1 EXPONENTIËLE FUNCTIES

DEFINITIE EXPONENTIËLE FUNCTIES

- Algemene formule : $N = b \cdot g^t$ waarbij

  b = beginhoeveelheid t = tijd

  g = groeifactor

- Exponentiële functies gebruik je als :

  - Iedere keer met hetzelfde getal vermenigvuldigd wordt (x3)

  - Iedere keer hetzelfde percentage erbij komt of eraf gaat.

    (Iedere keer + 3% → Iedere keer vermenigvuldigen met 1,03)

VOORBEELD 1

Op 1 jan 2003 zet Harrie 500 euro op de bank. Hij krijgt 6% rente per jaar.

a. Is dit lineair of exponentieel ? Waarom ?

b. Bepaal de formule en bereken daarmee het bedrag na 5 jaar.

c. Bereken in welk jaar het bedrag voor het eerst meer dan verdubbeld is.

Jan zet op 1 jan 2003 700 euro op de bank. Hij krijgt €50 rente per jaar

d. Stel de formule van Jan op

e. Bereken in welk jaar het bedrag van Harrie groter is dan dat van Jan.

OPLOSSING 1

a. Exponentieel, iedere keer +6% → x 1,06.

b. $N = 500 \cdot 1{,}06^t$.

c. $N(5) = 500 \cdot 1{,}06^5 = 669{,}11$ (euro's dus 2 decimalen)

d. $1000 = 500 \cdot 1{,}06^t$

(1) $Y1 = 500 \cdot 1{,}06^t$ en $Y2 = 1000$
(2) Intersect
(3) x =11,9 = 12 jaar (rente krijg je pas aan het einde)

Dus in 2003 + 12 = 2015

e. Nu komt er iedere keer een vast bedrag bij (+50). Dus nu een lineaire formule :
$y = 700 + 50t$

f. Harrie > Jan → $500 \cdot 1{,}06^t > 700 + 50t$

Eerst oplossen $500 \cdot 1{,}06^t = 700 + 50t$

(1) $Y1 = 500 \cdot 1{,}06^x \quad en \quad Y2 = 700 + 50x$
(2) Intersect
(3) x = 21,97 = 22 jaar (rente krijg je pas aan het einde)

Dus in 2003 + 22 = 2025

EXTRA:

- procentuele toename = (nieuw – oud) / oud x 100%

LES 2 : GROEIFACTOR BEREKENEN

VOORBEELD 1

Een bacterie groeit met 12 % per dag. Bereken de groeifactor en het groeipercentage per

a. 2 dagen

b. week

c. halve dag

d. uur

OPLOSSING 1

100 + 12 = 112 → 112/100 = 1,12

Groeifactor per dag 1,12

a. $g = 1{,}12$

$g_{2dagen} = g^2 = 1{,}12^2 = 1{,}2544$

$Groeipercentage\ = 125{,}44 - 100 = \ 25{,}44\%$

b. $g = 1{,}12$

$g_{week} = g_{7\ dagen} = g^7 = 1{,}12^7 = 2{,}2107$

$Groeipercentage\ = \ 221{,}07 - 100 = 121{,}07\%$

c. $g = 1{,}12$

$g_{\frac{1}{2}dag} = g^{\frac{1}{2}} = 1{,}12^{\frac{1}{2}} = 1{,}0583$

$Groeipercentage\ = \ 105{,}83 - 100 = 5{,}83\%$

d. $g = 1{,}12$

$g_{uur} = g_{\frac{1}{24}dag} = g^{\frac{1}{24}} = 1{,}12^{\frac{1}{24}} = 1{,}0047$

$Groeipercentage\ = \ 100{,}47 - 100 = 0{,}47\%$

VOORBEELD 2

Een andere bacterie verdubbelt in 10 jaar. Bereken het groeipercentage per jaar.

OPLOSSING 2

Je kunt dit op 2 manieren oplossen :

(1) Neem als beginhoeveelheid bijvoorbeeld 100 en gebruik de formule $N = b \cdot g^t$.
Dit geeft :

$$100 \cdot g^{10} = 200$$
$$g^{10} = 2$$
$$g = 2^{\frac{1}{10}} = 1{,}072$$ dus $groeipercentage = 7{,}2\%$

(2) Het verdubbelt in 10 dagen. Dus

$$g_{10\ dagen} = 2$$
$$g = 2^{\frac{1}{10}} = 1{,}072$$ dus $groeipercentage = 7{,}2\%$

PARAGRAAF 12.2 GROEIFORMULES

LES 1 : EXPONENTIËLE FORMULE BEPALEN

VOORBEELD 1

Een hoeveelheid neemt exponentieel af. Op $t = 3$ is $N = 505$ en op $t = 8$ is $N = 150$.

Stel de formule op van N.

OPLOSSING 1

Je kunt een stappenplan gebruiken :

(1) Formule $N = b \cdot g^t$

(2) Groeifactor berekenen $g_{...dagen} = \frac{Achterste}{Voorste}$

(3) Beginwaarde b berekenen door een punt in te vullen

(4) Formule opschrijven

(1) Formule $N = b \cdot g^t$

(2) Groeifactor uitrekenen. Dit kan op twee manieren :

(2.1) Neem als beginhoeveelheid 505 en gebruik de formule $N = b \cdot g^t$:

$150 = 505 \cdot g^5$ (of los dit op met intersect)

$g^5 = \frac{150}{505} = 0{,}297..$

$g = 0{,}297^{\frac{1}{5}} = 0{,}784$

(2.2) $g_{5\ jaren} = \frac{150}{505} = 0{,}297..$

$g_{1\ jaar} = 0{,}297^{\frac{1}{5}} = 0{,}784$ *(methode boek)*

(3) beginwaarde uitrekenen

Je weet $N = b \cdot 0{,}748^t$

Punt (3,505) invullen→ $505 = b \cdot 0{,}748^3$ (of intersect)

$b = \frac{505}{0{,}7843^3} = 1048$

(4) Formule $N = 1048 \cdot 0{,}748^t$

LES 2 : VERZADIGINGSNIVEAU BEPALEN

DEFINITIE

- Verzadigingsniveau = { y-waarde waar de formule op termijn naar toe gaat }
- Verzadigingsniveau berekenen → t heel groot maken (t = 1000000)

VOORBEELD 1

Beredeneer het verzadigingsniveau en de praktische betekenis van

a. De hoeveelheid medicijn (M) in het bloed gedraagt zich volgens de formule $M = 1 + 3 \cdot 0{,}2^t$

b. Het aantal bacteriën (B) groeit volgens de formule $B = \frac{180}{6+3\cdot 0{,}4^t}$

c. Beredeneer of de formule van B stijgend of dalend is.

OPLOSSING 1

a. $t\ heel\ groot \quad \Longrightarrow 3 \cdot 0{,}2^t \approx 0 \quad \Rightarrow 1 + 3 \cdot 0{,}2^t \approx 1$
Dus het verzadigingsniveau is 1 (gram)
Dit betekent dat er altijd 1 gram medicijn in het bloed blijft !!!

b. $t\ heel\ groot \quad \Longrightarrow 3 \cdot 0{,}4^t \approx 0 \quad \Rightarrow 6 + 3 \cdot 0{,}2^t \approx 6 \quad \Rightarrow \frac{180}{6+3\cdot 0{,}4^t} = \frac{180}{6} = 30$
Het aantal bacteriën (B) gaat op lange termijn naar 30

c. $t \uparrow \Rightarrow 0{,}4^t \downarrow \Rightarrow 3 \cdot 0{,}4^t \downarrow \Rightarrow 6 + 3 \cdot 0{,}4^t \downarrow \Rightarrow \frac{180}{6+3\cdot 0{,}4^t} \uparrow$
Dus een stijgende functie.

OPMERKING

Je kunt **c** al beredeneren omdat op t = 0 er $B = \frac{180}{6+3\cdot 0{,}4^0} = \frac{180}{9} = 20$ beestjes zijn en het verzadigingsniveau is 30 (dus stijgend).

PARAGRAAF 12.3 : LOGARITMEN

LES 1 LOGARITMEN

DEFINITIE LOGARITMEN

- Hoofdregel : $g^t = b \Leftrightarrow t = {}^g log\ (b)$ met domein $b > 0$

Voor logaritmen uit je hoofd berekenen gebruik je de hulpregel

- Hulpregel : ${}^g log(g)^t = t$

Voorbeeld 1

Bereken uit je hoofd

a. ${}^3 log(9) =$

b. ${}^3\log(\sqrt{27})$

c. ${}^2 log\left(\frac{1}{2}\right)$

Oplossing 1

a. ${}^3 log(9) = {}^3 log(3^2) = 2$
b. ${}^3 log(\sqrt{27}) = {}^3 log(\sqrt{3^3}) = {}^3 log\left((3^3)^{\frac{1}{2}}\right) = {}^3 log\left(3^{1\frac{1}{2}}\right) = 1\frac{1}{2}$
c. ${}^2 log\left(\frac{1}{2}\right) = {}^2 log(2^{-1}) = -1$

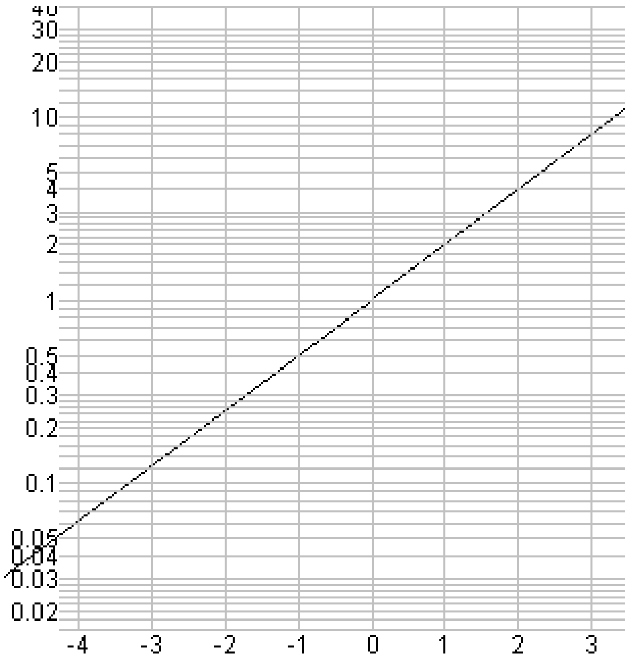
Opmerking

Als je op de GR $y = {}^6\log\ (2x + 1)$ wil intikken, moet dit als volgt doen :

$Y1 = \log(2x + 1) \,/\, \log(6)$ of met de knop logbase (Math > A : logbase)

PARAGRAAF 12.4 WERKEN MET LOGARITMEN

LES 1 : LOGARITMISCH PAPIER



DEFINITIES

Op logaritmisch papier is :

- de macht lineair (iedere keer + 1)
- wordt in een stapje alles 10 keer zo groot
- de formule $y = b \cdot g^t$ (exponentiële) een rechte lijn !!!!

VOORBEELD 1

Aflezen A,B,C,D,E en F op blz. 35 log papier.

LES 2 : REKENREGELS LOGARITMEN

REKENREGELS LOGARITMEN

De belangrijkste 4 regels zijn :

(1) $^{g}log\ (a) + {}^{g}log\ (b) = {}^{g}log\ (a \cdot b)$ $\qquad$ $^{3}log\ (5) + {}^{3}log\ (x) = {}^{3}log\ (5x)$

(2) $^{g}log\ (a) - {}^{g}log\ (b) = {}^{g}log\ (\frac{a}{b})$ $\qquad$ $^{2}log\ (10) - {}^{2}log\ (5) = {}^{2}log\ (\frac{10}{5}) = 1$

(3) $^{g}log(a^{k}) = k \cdot {}^{g}log(a)$ $\qquad$ $^{3}log(a^{5}) = 5 \cdot {}^{3}log(a)$

(4) $^{g}log(g)^{t} = t$ $\qquad$ $^{7}log(7)^{5} = 5$

Er zijn ook nog een aantal regels die handig kunnen zijn :

(5) $^{g}log(1) = 0$ $\qquad$ $^{7}log(1) = {}^{7}log(7^{0}) = 0$

(6) $log(a) = {}^{10}log(a)$ $\qquad$ $log(3) = {}^{10}log(3)$

(7) $^{g}log\ (a) = \frac{log\ (a)}{log\ (g)}$ $\qquad$ $^{8}log\ (20) = \frac{log\ (20)}{log\ (8)}$

(8) $^{\frac{1}{g}}log(a) = -\ {}^{g}log(a)$ $\qquad$ $^{\frac{1}{3}}log(x) = -\ {}^{3}log(x)$

VOORBEELD 1

Bereken exact met de rekenregels

a. ${}^{3}log(6) + {}^{3}log(12)$

b. ${}^{3}log(25) + {}^{\frac{1}{3}}log(5)$

c. $2 \cdot {}^{3}log(6) - {}^{3}log(12) =$

OPLOSSING 1

a. ${}^{3}log(6) + {}^{3}log(12) = {}^{3}log(6 \cdot 12) = {}^{3}log(72)$

b. ${}^{3}log(25) + {}^{\frac{1}{3}}log(5) = {}^{3}log(5^2) - {}^{3}log(5) = 2 \cdot {}^{3}log(5) - {}^{3}log(5) = {}^{3}log(5)$

c. $2 \cdot {}^{3}log(6) - {}^{3}log(12) = {}^{3}log(6^2) - {}^{3}log(12) = {}^{3}log(36) - {}^{3}log(12)$

${}^{3}log\left(\frac{36}{12}\right) = {}^{3}log(3) = 1$ { want $3^1 = 3$ }

VOORBEELD 2

Gegeven is de formule $N(x) = 3 + 6\log(x)$. Bereken wat er gebeurt met de waarde van N als :

a. De waarde van x verdubbelt.
b. De waarde van x halveert.

OPLOSSING 2

a. $N(2x) = 3 + 6\log(2x) = 3 + 6\,[\,\log(2) + \log(x)\,] = 3 + 6\log(2) + \log(x)$
$N(2x) = 3 + 1{,}81 + \log(x)$
De waarde van N neemt dan altijd met 1,81 toe.

b. $N\left(\frac{1}{2}x\right) = 3 + 6\log\left(\frac{1}{2}x\right) = 3 + 6\left[\log\left(\frac{1}{2}\right) + \log(x)\right] = 3 + 6\log\left(\frac{1}{2}\right) + \log(x)$
$N(2x) = 3 - 1{,}81 + \log(x)$
De waarde van N neemt dan altijd met 1,81 af.

PARAGRAAF 12.5 GROEISNELHEID

LES 1 : HET GETAL E

We kijken naar een paar afgeleiden

VOORBEELDEN

a. $f(x) = 2{,}5^x$ $\rightarrow f'(x) = 0{,}916 \cdot 2{,}5^x$
b. $f(x) = 3^x$ $\rightarrow f(x) = 1{,}10 \cdot 3^x$
c. $f(x) = 2{,}718..^x = e^x$ $\rightarrow f\,'(x) = 1 \cdot e^x = e^x$

Dus er geldt $f(x) = e^x$ $\rightarrow f\,'(x) = e^x$

OPMERKING

- Omdat e een getal is (en wel = 2,718…) is e^2 = 7,389.. ook een getal en dus alle machten zijn getallen

VOORBEELD 1

Herleid

a. $3e + 6e =$

b. $3e^2 \cdot 13e^2 =$

c. $\frac{e^{2x}-9}{e^x-3} =$

d. $(1 + e^{3x})^2 =$

OPLOSSING 1

a. $9e$
b. $39e^4$
c. $\frac{e^{2x}-9}{e^x-3} = \frac{(e^x-3)(e^x+3)}{e^x-3} = e^x + 3$
d. $(1 + e^{3x})^2 = (1 + e^{3x})(1 + e^{3x}) = 1 + e^{3x} + e^{3x} + e^{6x} = e^{6x} + 2e^{3x} + 1$

LES 2 : DIFFERENTIËREN VAN E-MACHTEN

DIFFERENTIËREN VAN E-MACHTEN

- Hoofdregel voor e-machten : $f(x) = e^x \ \rightarrow\ f'(x) = e^x$

OPMERKING

- Ook bij e-machten kun je productregel, quotiëntregel of kettingregel nodig hebben!!!

VOORBEELD 1

Differentieer

a. $f(x) = 5e^{3x}$

b. $f(x) = 4xe^x$

c. $f(x) = e^{x^2}$

d. $f(x) = \frac{3x-5}{e^{2x}}$

OPLOSSING 1

Differentieer

a. $f'(x) = 5e^{3x} \cdot 3 = 15e^{3x}$

b. $f'(x) = 4xe^x + 4e^x$

c. $f'(x) = \ e^{x^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2}$

d. $f'(x) = \frac{e^{2x} \cdot 2 \cdot (3x-5) - 3e^{2x}}{e^{4x}} = \frac{6xe^{2x} - 10e^{2x} - 3e^{2x}}{e^{4x}} = \frac{6xe^{2x} - 13e^{2x}}{e^{4x}} = \frac{e^{2x}(6x-13)}{e^{2x} \cdot e^{2x}} = \frac{6x-13}{e^{2x}}$

LES 3 : DE NATUURLIJKE LOGARITME { LN(X) }

DEFINITIES LN(X)

- $ln(x)$ = { de natuurlijke logaritme van x }
- $ln(x) = {}^{e}log(x)$

Omdat ln(x) een logaritme is gelden alle logaritme regels! Bijvoorbeeld :

- $ln(e^x) = {}^{e}log(e^x) = x\{ {}^{g}log(g^x) = x \}$
- $ln(e^3) = 3$

VOORBEELD 1

Los de volgende vergelijkingen exact op.
Denk aan de regel : $g^t = b \Leftrightarrow t = {}^{g}log\,(b)$.

a. $e^x = 10$

b. $e^{2x+1} = 18$

OPLOSSING 1

a. $e^x = 10$

$x = {}^{e}log(10) = ln(10)$

b. $e^{2x+1} = 18$

$2x + 1 = {}^{e}log(18) = ln(18)$

$2x = ln(18) - 1$

$x = \frac{1}{2} ln(18) - \frac{1}{2}$

REKENREGELS LOGARITMEN

De belangrijkste 4 logaritme regels in ln-vorm zijn :

(1) $ln\ (a) + ln\ (b) = ln\ (a \cdot b)$

(2) $ln\ (a) - ln\ (b) = ln\ (\frac{a}{b})$

(3) $ln(a^k) = k \cdot ln(a)$

(4) $ln\ (e^t)\ =\ t$

VOORBEELD 2

Herleid tot één vorm

a. $ln\ (e^2)\ =$

b. $ln(3)\ +\ ln(13)\ =$

c. $ln^2(e)\ +\ 2\ =$

d. $ln(3)\ +\ 2\ =$

OPLOSSING 2

a. $ln\ (e^2)\ = 2$

b. $ln(3)\ +\ ln(13)\ = ln(3 \cdot 13) = ln(39)$

c. $ln^2(e)\ +\ 2\ =\ (ln(e))^2 + 2 = 1 + 2 = 3$

d. $ln(3)\ +\ 2\ =\ ln(3) + ln\ (e^2)\ = ln(3e^2)$

LES 3 : DIFFERENTIËREN VAN DE NATUURLIJKE LOGARITME LN(X)

DEFINITIE DIFFERENTIËREN VAN LOGARITMISCHE FUNCTIES

- **Hoofdregel :** $\boldsymbol{f(x) = ln(x)} \quad \rightarrow \boldsymbol{f'(x) = \frac{1}{x}}$
- **Hulpregel :** $\boldsymbol{f(x) = {}^{g}log\ (x)} \quad \rightarrow \boldsymbol{f'(x) = \frac{1}{x\ ln(g)}}$

VOORBEELD 1

Differentieer

a. $f(x) = 3xln(x)$

b. $f(x) = ln\ (x^2 + 5x)$

c. $f(x) = ln^3(x)$

d. $f(x) = \ {}^{3}log\ (6x + 7)$

OPLOSSING 1

Differentieer

a. $f'(x) = 3x \cdot ln(x) + 3 \cdot \frac{1}{x} = 3xln(x) + \frac{3}{x}$

b. $f'(x) = \frac{1}{x^2+5x} \cdot (2x + 5) = \frac{(2x+5)}{x^2+5x}$

c. $f'(x) = 3 \cdot ln^2(x) \cdot \frac{1}{x}$ *{ KETTINGREGEL MET u = ln(x) }*

d. $f'(x) = \frac{1}{(6x+7)ln(3)} \cdot 6$