

PARAGRAAF 12.1 : EXPONENTIËLE GROEI

LES 1 EXPONENTIËLE FUNCTIES

DEFINITIE EXPONENTIËLE FUNCTIES

- Algemene formule : $N = b \cdot g^t$ waarbij
 $b =$ beginhoeveelheid $t =$ tijd
 $g =$ groeifactor
- Exponentiële functies gebruik je als :
 - ledere keer met hetzelfde getal vermenigvuldigd wordt ($\times 3$)
 - ledere keer hetzelfde percentage erbij komt of eraf gaat.
(ledere keer + 3% \rightarrow ledere keer vermenigvuldigen met 1,03)

VOORBEELD 1

Op 1 jan 2003 zet Harrie 500 euro op de bank. Hij krijgt 6% rente per jaar.

- Is dit lineair of exponentieel ? Waarom ?
- Bepaal de formule en bereken daarmee het bedrag na 5 jaar.
- Bereken in welk jaar het bedrag voor het eerst meer dan verdubbeld is.

Jan zet op 1 jan 2003 700 euro op de bank. Hij krijgt €50 rente per jaar

- Stel de formule van Jan op
- Bereken in welk jaar het bedrag van Harrie groter is dan dat van Jan.

OPLOSSING 1

- a. Exponentieel, iedere keer +6% $\rightarrow \times 1,06$.
b. $N = 500 \cdot 1,06^t$.
c. $N(5) = 500 \cdot 1,06^5 = 669,11$ (euro's dus 2 decimalen)
d. $1000 = 500 \cdot 1,06^t$

(1) $Y1 = 500 \cdot 1,06^t$ en $Y2 = 1000$

(2) Intersect

(3) $x = 11,9 = 12$ jaar (rente krijg je pas aan het einde)

Dus in $2003 + 12 = 2015$

- e. Nu komt er iedere keer een vast bedrag bij (+50). Dus nu een lineaire formule :

$$y = 700 + 50t$$

- f. Harrie > Jan $\rightarrow 500 \cdot 1,06^t > 700 + 50t$

Eerst oplossen $500 \cdot 1,06^t = 700 + 50t$

(1) $Y1 = 500 \cdot 1,06^x$ en $Y2 = 700 + 50x$

(2) Intersect

(3) $x = 21,97 = 22$ jaar (rente krijg je pas aan het einde)

Dus in $2003 + 22 = 2025$

EXTRA:

- procentuele toename = $(\text{nieuw} - \text{oud}) / \text{oud} \times 100\%$

LES 2 : GROEIFACTOR BEREKENEN**VOORBEELD 1**

Een bacterie groeit met 12 % per dag. Bereken de groeifactor en het groeipercentage per

- a. 2 dagen
- b. week
- c. halve dag
- d. uur

OPLOSSING 1

$$100 + 12 = 112 \quad \rightarrow \quad 112/100 = 1,12$$

Groeifactor per dag 1,12

a. $g = 1,12$

$$g_{2\text{dagen}} = g^2 = 1,12^2 = 1,2544$$

$$\text{Groeipercentage} = 125,44 - 100 = 25,44\%$$

b. $g = 1,12$

$$g_{\text{week}} = g_{7\text{dagen}} = g^7 = 1,12^7 = 2,2107$$

$$\text{Groeipercentage} = 221,07 - 100 = 121,07\%$$

c. $g = 1,12$

$$g_{\frac{1}{2}\text{dag}} = g^{\frac{1}{2}} = 1,12^{\frac{1}{2}} = 1,0583$$

$$\text{Groeipercentage} = 105,83 - 100 = 5,83\%$$

d. $g = 1,12$

$$g_{\text{uur}} = g_{\frac{1}{24}\text{dag}} = g^{\frac{1}{24}} = 1,12^{\frac{1}{24}} = 1,0047$$

$$\text{Groeipercentage} = 100,47 - 100 = 0,47\%$$

VOORBEELD 2

Een andere bacterie verdubbelt in 10 jaar. Bereken het groeipercentage per jaar.

OPLOSSING 2

Je kunt dit op 2 manieren oplossen :

(1) Neem als beginhoeveelheid bijvoorbeeld 100 en gebruik de formule $N = b \cdot g^t$.

Dit geeft :

$$100 \cdot g^{10} = 200$$

$$g^{10} = 2$$

$$g = 2^{\frac{1}{10}} = 1,072 \quad \text{dus groeipercentage} = 7,2\%$$

(2) Het verdubbelt in 10 dagen. Dus

$$g_{10 \text{ dagen}} = 2$$

$$g = 2^{\frac{1}{10}} = 1,072 \quad \text{dus groeipercentage} = 7,2\%$$

PARAGRAAF 12.2 GROEIFORMULES

LES 1 : EXPONENTIËLE FORMULE BEPALEN

VOORBEELD 1

Een hoeveelheid neemt exponentieel af. Op $t = 3$ is $N = 505$ en op $t = 8$ is $N = 150$.
Stel de formule op van N.

OPLOSSING 1

Je kunt een stappenplan gebruiken :

- (1) Formule $N = b \cdot g^t$
- (2) Groeifactor berekenen $g_{\dots \text{dagen}} = \frac{\text{Achterste}}{\text{Voorste}}$
- (3) Beginwaarde b berekenen door een punt in te vullen
- (4) Formule opschrijven

- (1) Formule $N = b \cdot g^t$
- (2) Groeifactor uitrekenen. Dit kan op twee manieren :

(2.1) Neem als beginhoeveelheid 505 en gebruik de formule $N = b \cdot g^t$:

$$150 = 505 \cdot g^5 \quad (\text{of los dit op met intersect})$$

$$g^5 = \frac{150}{505} = 0,297..$$

$$g = 0,297^{\frac{1}{5}} = 0,784$$

(2.2) $g_{5 \text{ jaren}} = \frac{150}{505} = 0,297..$

$$g_{1 \text{ jaar}} = 0,297^{\frac{1}{5}} = 0,784 \quad (\text{methode boek})$$

- (3) beginwaarde uitrekenen

Je weet

$$N = b \cdot 0,748^t$$

Punt (3,505) invullen →

$$505 = b \cdot 0,748^3 \quad (\text{of intersect})$$

$$b = \frac{505}{0,7843^3} = 1048$$

- (4) Formule

$$N = 1048 \cdot 0,748^t$$

LES 2 : VERZADIGINGSNIVEAU BEPALEN**DEFINITIE**

- Verzadigingsniveau = { y-waarde waar de formule op termijn naar toe gaat }
- Verzadigingsniveau berekenen \rightarrow t heel groot maken (t = 1000000)

VOORBEELD 1

Beredeneer het verzadigingsniveau en de praktische betekenis van

- a. De hoeveelheid medicijn (M) in het bloed gedraagt zich volgens de formule

$$M = 1 + 3 \cdot 0,2^t$$

- b. Het aantal bacteriën (B) groeit volgens de formule $B = \frac{180}{6+3 \cdot 0,4^t}$

- c. Beredeneer of de formule van B stijgend of dalend is.

OPLOSSING 1

- a. t heel groot $\Rightarrow 3 \cdot 0,2^t \approx 0 \Rightarrow 1 + 3 \cdot 0,2^t \approx 1$

Dus het verzadigingsniveau is 1 (gram)

Dit betekent dat er altijd 1 gram medicijn in het bloed blijft !!!

- b. t heel groot $\Rightarrow 3 \cdot 0,4^t \approx 0 \Rightarrow 6 + 3 \cdot 0,4^t \approx 6 \Rightarrow \frac{180}{6+3 \cdot 0,4^t} = \frac{180}{6} = 30$

Het aantal bacteriën (B) gaat op lange termijn naar 30

- c. $t \uparrow \Rightarrow 0,4^t \downarrow \Rightarrow 3 \cdot 0,4^t \downarrow \Rightarrow 6 + 3 \cdot 0,4^t \downarrow \Rightarrow \frac{180}{6+3 \cdot 0,4^t} \uparrow$

Dus een stijgende functie.

OPMERKING

Je kunt **c** al beredeneren omdat op $t = 0$ er $B = \frac{180}{6+3 \cdot 0,4^0} = \frac{180}{9} = 20$ beestjes zijn en het verzadigingsniveau is 30 (dus stijgend).

PARAGRAAF 12.3 : LOGARITMEN

LES 1 LOGARITMEN

DEFINITIE LOGARITMEN

- Hoofdregel : $g^t = b \Leftrightarrow t = {}^g\log(b)$ met domein $b > 0$

Voor logaritmen uit je hoofd berekenen gebruik je de hulpregel

- Hulpregel : ${}^g\log(g)^t = t$

VOORBEELD 1

Bereken uit je hoofd

- ${}^3\log(9) =$
- ${}^3\log(\sqrt{27})$
- ${}^2\log\left(\frac{1}{2}\right)$

OPLOSSING 1

- ${}^3\log(9) = {}^3\log(3^2) = 2$
- ${}^3\log(\sqrt{27}) = {}^3\log(\sqrt{3^3}) = {}^3\log\left((3^3)^{\frac{1}{2}}\right) = {}^3\log\left(3^{1\frac{1}{2}}\right) = 1\frac{1}{2}$
- ${}^2\log\left(\frac{1}{2}\right) = {}^2\log(2^{-1}) = -1$

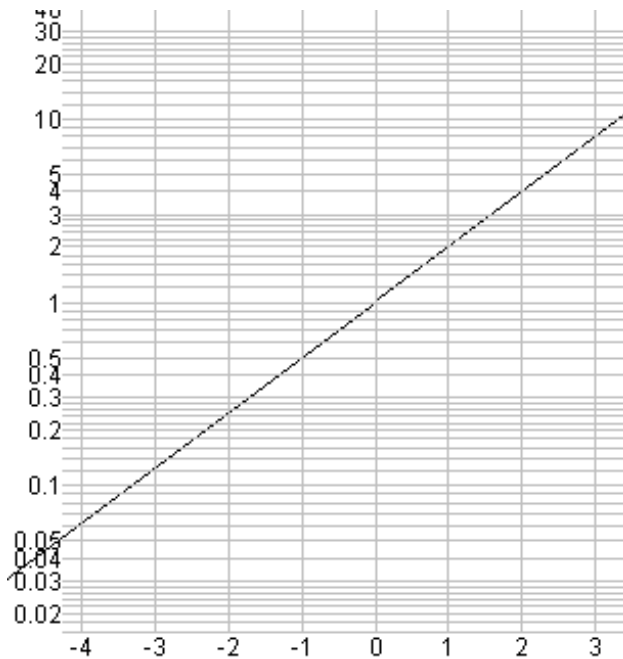
OPMERKING

Als je op de GR $y = {}^6\log(2x + 1)$ wil intikken, moet dit als volgt doen :

$Y1 = \log(2x + 1) / \log(6)$ of met de knop logbase (Math > A : logbase)

PARAGRAAF 12.4 WERKEN MET LOGARITMEN

LES 1 : LOGARITMISCH PAPIER

**DEFINITIES**

Op logaritmisch papier is :

- de macht lineair (iedere keer + 1)
- wordt in een stapje alles 10 keer zo groot
- de formule $y = b \cdot g^t$ (exponentiële) een rechte lijn !!!!

VOORBEELD 1

Aflezen A,B,C,D,E en F op blz. 35 log papier.

LES 2 : REKENREGELS LOGARITMEN**REKENREGELS LOGARITMEN**

De belangrijkste 4 regels zijn :

$$(1) \quad {}^g \log(a) + {}^g \log(b) = {}^g \log(a \cdot b) \qquad {}^3 \log(5) + {}^3 \log(x) = {}^3 \log(5x)$$

$$(2) \quad {}^g \log(a) - {}^g \log(b) = {}^g \log\left(\frac{a}{b}\right) \qquad {}^2 \log(10) - {}^2 \log(5) = {}^2 \log\left(\frac{10}{5}\right) = 1$$

$$(3) \quad {}^g \log(a^k) = k \cdot {}^g \log(a) \qquad {}^3 \log(a^5) = 5 \cdot {}^3 \log(a)$$

$$(4) \quad {}^g \log(g)^t = t \qquad {}^7 \log(7)^5 = 5$$

Er zijn ook nog een aantal regels die handig kunnen zijn :

$$(5) \quad {}^g \log(1) = 0 \qquad {}^7 \log(1) = {}^7 \log(7^0) = 0$$

$$(6) \quad \log(a) = {}^{10} \log(a) \qquad \log(3) = {}^{10} \log(3)$$

$$(7) \quad {}^g \log(a) = \frac{\log(a)}{\log(g)} \qquad {}^8 \log(20) = \frac{\log(20)}{\log(8)}$$

$$(8) \quad {}^{\frac{1}{g}} \log(a) = - {}^g \log(a) \qquad {}^{\frac{1}{3}} \log(x) = - {}^3 \log(x)$$

VOORBEELD 1

Bereken exact met de rekenregels

a. ${}^3 \log(6) + {}^3 \log(12)$

b. ${}^3 \log(25) + {}^{\frac{1}{3}} \log(5)$

c. $2 \cdot {}^3 \log(6) - {}^3 \log(12) =$

OPLOSSING 1

a. ${}^3\log(6) + {}^3\log(12) = {}^3\log(6 \cdot 12) = {}^3\log(72)$

b. ${}^3\log(25) + \frac{1}{3}\log(5) = {}^3\log(5^2) - {}^3\log(5) = 2 \cdot {}^3\log(5) - {}^3\log(5) = {}^3\log(5)$

c. $2 \cdot {}^3\log(6) - {}^3\log(12) = {}^3\log(6^2) - {}^3\log(12) = {}^3\log(36) - {}^3\log(12)$

$${}^3\log\left(\frac{36}{12}\right) = {}^3\log(3) = 1 \quad \{ \text{want } 3^1 = 3 \}$$

VOORBEELD 2

Gegeven is de formule $N(x) = 3 + 6 \log(x)$. Bereken wat er gebeurt met de waarde van N als :

- a.** De waarde van x verdubbelt.
b. De waarde van x halveert.

OPLOSSING 2

a. $N(2x) = 3 + 6 \log(2x) = 3 + 6 [\log(2) + \log(x)] = 3 + 6 \log(2) + \log(x)$

$$N(2x) = 3 + 1,81 + \log(x)$$

De waarde van N neemt dan altijd met 1,81 toe.

b. $N\left(\frac{1}{2}x\right) = 3 + 6 \log\left(\frac{1}{2}x\right) = 3 + 6 \left[\log\left(\frac{1}{2}\right) + \log(x) \right] = 3 + 6 \log\left(\frac{1}{2}\right) + \log(x)$

$$N\left(\frac{1}{2}x\right) = 3 - 1,81 + \log(x)$$

De waarde van N neemt dan altijd met 1,81 af.

PARAGRAAF 12.5 GROEISNELHEID

LES 1 : HET GETAL E

We kijken naar een paar afgeleiden

VOORBEELDEN

- a. $f(x) = 2,5^x$ $\rightarrow f'(x) = 0,916 \cdot 2,5^x$
 b. $f(x) = 3^x$ $\rightarrow f'(x) = 1,10 \cdot 3^x$
 c. $f(x) = 2,718 \dots^x = e^x$ $\rightarrow f'(x) = 1 \cdot e^x = e^x$

Dus er geldt $f(x) = e^x$ $\rightarrow f'(x) = e^x$

OPMERKING

- Omdat e een getal is (en wel = 2,718...) is $e^2 = 7,389 \dots$ ook een getal en dus alle machten zijn getallen

VOORBEELD 1

Herleid

- a. $3e + 6e =$
 b. $3e^2 \cdot 13e^2 =$
 c. $\frac{e^{2x-9}}{e^{x-3}} =$
 d. $(1 + e^{3x})^2 =$

OPLOSSING 1

- a. $9e$
 b. $39e^4$
 c. $\frac{e^{2x-9}}{e^{x-3}} = \frac{(e^x-3)(e^x+3)}{e^x-3} = e^x + 3$
 d. $(1 + e^{3x})^2 = (1 + e^{3x})(1 + e^{3x}) = 1 + e^{3x} + e^{3x} + e^{6x} = e^{6x} + 2e^{3x} + 1$

LES 2 : DIFFERENTIËREN VAN E-MACHTEN**DIFFERENTIËREN VAN E-MACHTEN**

- Hoofdregel voor e-machten : $f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x$

OPMERKING

- Ook bij e-machten kun je productregel, quotiëntregel of kettingregel nodig hebben!!!

VOORBEELD 1

Differentieer

- $f(x) = 5e^{3x}$
- $f(x) = 4xe^x$
- $f(x) = e^{x^2}$
- $f(x) = \frac{3x-5}{e^{2x}}$

OPLOSSING 1

Differentieer

- $f'(x) = 5e^{3x} \cdot 3 = 15e^{3x}$
- $f'(x) = 4xe^x + 4e^x$
- $f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2}$
- $f'(x) = \frac{e^{2x} \cdot 2 \cdot (3x-5) - 3e^{2x}}{e^{4x}} = \frac{6xe^{2x} - 10e^{2x} - 3e^{2x}}{e^{4x}} = \frac{6xe^{2x} - 13e^{2x}}{e^{4x}} = \frac{e^{2x}(6x-13)}{e^{2x} \cdot e^{2x}} = \frac{6x-13}{e^{2x}}$

LES 3 : DE NATUURLIJKE LOGARITME { LN(X) }**DEFINITIES LN(X)**

- $\ln(x) = \{ \text{de natuurlijke logaritme van } x \}$
- $\ln(x) = {}^e \log(x)$

Omdat $\ln(x)$ een logaritme is gelden alle logaritme regels! Bijvoorbeeld :

- $\ln(e^x) = {}^e \log(e^x) = x \{ {}^g \log(g^x) = x \}$
- $\ln(e^3) = 3$

VOORBEELD 1

Los de volgende vergelijkingen exact op.

Denk aan de regel : $g^t = b \Leftrightarrow t = {}^g \log(b)$.

- a. $e^x = 10$
- b. $e^{2x+1} = 18$

OPLOSSING 1

- a. $e^x = 10$
 $x = {}^e \log(10) = \ln(10)$
- b. $e^{2x+1} = 18$
 $2x + 1 = {}^e \log(18) = \ln(18)$
 $2x = \ln(18) - 1$
 $x = \frac{1}{2} \ln(18) - \frac{1}{2}$

REKENREGELS LOGARITMEN

De belangrijkste 4 logaritme regels in ln-vorm zijn :

(1) $\ln(a) + \ln(b) = \ln(a \cdot b)$

(2) $\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$

(3) $\ln(a^k) = k \cdot \ln(a)$

(4) $\ln(e^t) = t$

VOORBEELD 2

Herleid tot één vorm

a. $\ln(e^2) =$

b. $\ln(3) + \ln(13) =$

c. $\ln^2(e) + 2 =$

d. $\ln(3) + 2 =$

OPLOSSING 2

a. $\ln(e^2) = 2$

b. $\ln(3) + \ln(13) = \ln(3 \cdot 13) = \ln(39)$

c. $\ln^2(e) + 2 = (\ln(e))^2 + 2 = 1 + 2 = 3$

d. $\ln(3) + 2 = \ln(3) + \ln(e^2) = \ln(3e^2)$

LES 3 : DIFFERENTIËREN VAN DE NATUURLIJKE LOGARITME LN(X)**DEFINITIE DIFFERENTIËREN VAN LOGARITMISCHE FUNCTIES**

- **Hoofdregel :** $f(x) = \ln(x) \quad \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$
- **Hulpregel :** $f(x) = {}^g\log(x) \quad \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln(g)}$

VOORBEELD 1

Differentieer

- $f(x) = 3x \ln(x)$
- $f(x) = \ln(x^2 + 5x)$
- $f(x) = \ln^3(x)$
- $f(x) = {}^3\log(6x + 7)$

OPLOSSING 1

Differentieer

- $f'(x) = 3 \cdot \ln(x) + 3x \cdot \frac{1}{x} = 3 \ln(x) + 3$
- $f'(x) = \frac{1}{x^2+5x} \cdot (2x + 5) = \frac{2x+5}{x^2+5x}$
- $f'(x) = 3 \cdot \ln^2(x) \cdot \frac{1}{x}$ { KETTINGREGEL MET $u = \ln(x)$ }
- $f'(x) = \frac{1}{(6x+7)\ln(3)} \cdot 6$