PARAGRAAF 11.1 : DE WORTEL-N WET

LES 1 HET VERSCHIL EN DE SOM VAN TWEE (VERSCHILLENDE) VARIABELEN

DEFINITIES

Voor de som en het verschil tussen twee normaal verdeelde (verschillende) variabelen X en Y geldt :

VERSCHIL

(1) V = { X – Y }

(2) $\mu_V = \mu_X - \mu_Y$

(3) $\sigma_V = \sqrt{{\sigma_X}^2 + {\sigma_Y}^2}$

SOM

(1) S = { X + Y }

(2) $\mu_S = \mu_X + \mu_Y$

(3) $\sigma_S = \sqrt{{\sigma_X}^2 + {\sigma_Y}^2}$

VOORBEELD 1

Een productieproces bestaat uit 2 fasen. De eerste fase duurt gemiddeld 6,3 minuten en $\sigma_1 = 0{,}8$. De tweede fase duurt gemiddeld 6,9 minuten en $\sigma_2 = 0{,}3$.

a. Bereken de kans dat de totale productietijd samen minder dan 13 minuten duurt.

b. Bereken de kans dat de tweede fase langer duurt dan de eerste fase.

OPLOSSING 1

a. **(1)** $S = P1 + P2$

(2) $\mu_S = \mu_1 + \mu_2 = 6{,}3 + 6{,}9 = 13{,}2$

(3) $\sigma_S = \sqrt{{\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2} = \sqrt{0{,}8^2 + 0{,}3^2} = \sqrt{0{,}73} \approx 0{,}854..$

(4) $P(S < 13) = normalcdf(-10\text{^}99, 13, 13.2, \sqrt{0{,}73}) = 0{,}407$

b. $P2 > P1 \rightarrow P2 - P1 > 0$

(1) $V = \{P2 – P1\}$

(2) $\mu_S = \mu_2 - \mu_1 = 6{,}9 - 6{,}3 = 0{,}6$

(3) $\sigma_S = \sqrt{{\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2} = \sqrt{0{,}8^2 + 0{,}3^2} = \sqrt{0{,}73} \approx 0{,}854..$

(4) $P(V > 0) = normalcdf(0, 10\text{^}99, 0.6, \sqrt{0{,}73}) = 0{,}759$

LES 2 WORTEL-N WET

DEFINITIES

Voor de som van n keer dezelfde variabele X geldt (ze noemen dit ook wel : een steekproef van n stuks (lengte n))

SOM (S)

(1) $\mu_S = n \cdot \mu_X$

(2) $\sigma_S = \sqrt{n} \cdot \sigma_X$

GEMIDDELDE $(\bar{X})$

(1) $\mu_{\bar{X}} = \mu_X$

(2) $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$

VOORBEELD 1

De lengte van rozen is normaal verdeeld met gemiddeld 25 cm
en σ = 3 cm. Wim neemt een steekproef van 10 rozen. Wim kijkt naar de totale lengte.

a. Bereken de kans de 10 rozen samen groter dan 270 cm zijn.

b. Bereken de kans een gemiddelde roos uit de steekproef groter dan 28 cm is.

OPLOSSING 1

a. $S = \{\, De\ som\ van\ de\ 10\ rozen \,\}$

(1) $\mu_S = n \cdot \mu_X = 10 \cdot 25 = 250$

(2) $\sigma_S = \sqrt{n} \cdot \sigma_X = \sigma_S = \sqrt{10} \cdot 3 (= 9{,}49)$

(3) $P(S > 270) = \ normalcdf(270, 10\text{^}99, 250, \sqrt{10} \cdot 3) \ = \ 0{,}0175$

b. $\bar{X} = \{\, De\ gemiddelde\ lengte\ van\ de\ roos\ in\ de\ steekproef\ van\ 10\ stuks \}$

(1) $\mu_{\bar{X}} = 25$

(2) $\sigma_{\bar{X}} = \frac{3}{\sqrt{10}} (\approx 0{,}95)$

(3) $P(\bar{X} > 28) = \ normalcdf(28, 10\text{^}99, 25, \frac{3}{\sqrt{10}}) \ = \ 0{,}0008$

PARAGRAAF 11.3 : BESLISSEN OP GROND VAN EEN STEEKPROEF

LES 1 DE TOETS VOOR DE NORMALE VERDELING

STAPPENPLAN TOETS

(1) Definieer de stochast X {= aantal …}

(2) Stel de nulhypothese H_0 (μ =…) en de alternatieve hypothese H_1 (μ<>≠..) op.

(3) Bereken de overschrijdingskans
(i) Als steekproefresultaat $R < \mu$ → $P(X \leq R)$
(ii) Als steekproefresultaat $R > \mu$ → $P(X \geq R)$

(4) Als P(X .. R) > α → H_0 accepteren

Als P(X .. R) < α → H_0 verwerpen

(5) De praktische conclusie

VOORBEELD 1

Lijnen is in de mode. Een fabrikant die maaltijdvervangers maakt, beweert dat zijn product 150 calorieën per pakje bevat. Het aantal calorieën per pakje is normaal verdeeld met een standaardafwijking van 20 calorieën. Willem denkt dat er minder calorieën in een pakje zitten. Hij pakt een willekeurig pakje om dit te testen. Dit bevat 107 calorieën.

a. Onderzoek of dit steekproefresultaat significant afwijkt van de bewering van de fabrikant bij $\alpha = 0{,}05$.

Jan wordt toch dikker. Hij denkt dat er meer dan 150 calorieën in een pakje zitten. Bij een steekproef van 25 pakjes door Jan, bleek het gemiddeld aantal calorieën per pakje 160 te zijn.

b. Onderzoek of dit steekproefresultaat significant afwijkt bij $\alpha = 0{,}01$.

De consumentenbond wil toetsen of het klopt dat er 150 calorieën in een pakje zitten. Bij een steekproef van 100 pakjes, bleek het gemiddeld aantal calorieën per pakje 147 te zijn. Ze toets met $\alpha = 0{,}05$.

c. Onderzoek of dit steekproefresultaat significant afwijkt bij $\alpha = 0{,}05$.

OPLOSSING 1

a.

(1) X = { het aantal calorieën }

(2) $H_0 : \mu = 150$ en $H_1 : \mu < 150$

(3) P(X ≤ 107) = normalcdf(-10^99, 107, 150, 20) = 0,0158

(4) P(X ≤ 107) = 0,0158 < α = 0,05 → H_0 verwerpen

(5) Willem heeft gelijk. Er zit significant minder calorieën in een pakje.

b.

(1) X = { het aantal calorieën in de steekproef van 25 }

(2) $H_0 : \mu = 150$ en $H_1 : \mu > 150$

(3) P(X ≥ 160) = normalcdf(160, 10^99, 150, $\frac{20}{\sqrt{25}}$) = 0,006

(4) P(X ≥ 160) = 0,006 < α = 0,01 → H_0 verwerpen

(5) Jan heeft gelijk. Er zit significant meer calorieën in een pakje.

c.

(1) X = { het aantal calorieën }

(2) $H_0 : \mu = 150$ en $H_1 : \mu \neq 150$ { TWEEZIJDIG !! }

(3) P(X ≤ 147) = normalcdf(-10^99,147,150, $\frac{20}{\sqrt{100}}$) = 0,0668

(4) P(X ≤ 147) = 0,0668 > ½ α = 0,025 → H_0 accepteren

(5) De consumentenbond heeft <u>geen</u> gelijk. Het aantal calorieën wijkt <u>niet</u> significant af van 150.

PARAGRAAF 11.4 : EENZIJDIG EN TWEEZIJDIG TOETSEN

LES 1 GRENZEN BEPALEN

VOORBEELD 1

Het IQ van Nederlanders is normaal verdeeld met $\mu = 100$ en $\sigma = 15$. De slimste 5% zit op de universiteit.

a. Bereken de grenswaarde voor dit IQ

Veel mensen hebben sociale problemen omdat ze te slim of “te dom” zijn. De middelste 95% heeft daar nauwelijks last van.

b. Bereken de grenzen voor dit IQ.

OPLOSSING 1

X = { IQ }. Maak een plaatje, dat helpt enorm. Je ziet dan dat je de grenswaarde wil berekenen. Dat kan o.a. met invnorm

a. $P(X > g)$ = normalcdf (g, 10^99, 100, 15) = 0,05 → Intersect → g = 124,67
óf g = invnorm(0,95, 100, 15) = 124,67

b. $P(X > g_1)$ = normalcdf (g_1, 10^99, 100, 15) = 0,025 → Intersect → g = 129,40
$P(X > g_2)$ = normalcdf (-10^99, g_2, 100, 15) = 0,025 → Intersect → g = 70,60

Of weer met invnorm.

PARAGRAAF 11.5 : BINOMIALE TOETSEN

LES 1 DE TOETS VOOR DE BINOMIALE VERDELING

VOORBEELD 1

Bij verkiezing stemt 30% op het CDA. Mientje denkt dat dat meer is. Ze gaat dit toetsen met $\alpha = 0,05$. Ze vraagt aan 400 mensen op wie ze gaan stemmen. Daarvan stemt 143 mensen CDA. Toets of Mientje gelijk heeft.

OPLOSSING 1

Nu is er een binomiale verdeling met n=400 en p=0,30 !!!!

(1) X = { het aantal CDA stemmers }

(2) $H_0 : p = 0,30$ ($\mu = 120$) en $H_1 : (p > 0,30) \mu > 150$

(3) $P(X \geq 143) = 1 - P(X \leq 142) = 1 - \text{binomcdf}(400,0,30,142) = 0,0077$

(4) $P(X \geq 143) = 0,0077 > \alpha = 0,05$ → H_0 accepteren

(5) Mientje heeft <u>geen</u> gelijk. Er zijn <u>niet</u> significant meer CDA stemmers.